BEYRÛNÎ'NİN TRİGONOMETRİSİ

A.S. SAIDAN*

Çeviren: MELEK DOSAY**

Sarton, *Introduction to the History of Science*(cilt 1) ciltlerinde Beyrûnî'-ye trigonometri eseri atfetmez. Bu makalede, Beyrûnî'nin iki trigonometri eseri üzerinde durulacaktır:

1. Bir çember içinde kirişler hakkında, yani; *İstiḫrâc el-Evtâr fi'd-Dâ'ire.*
2. Astronomi bilimi hakkında, yani; *Meḳâlîd 'İlm el-Hey'e.*

İlk eser düzlem trigonometri, ikincisi küresel trigonometri hakkındadır. Bu eserlerde yeni bir gelişme bulmak amacıyla Beyrûnî'den önceki trigonometri tarihi kısaca sunulmuştur.

Düzlem ve küresel trigonometrinin , M.Ö. İkinci yüzyıl sonlarında matematiksel astronominin bir konusu olarak Hiparkos tarafından başlatıldığı söylenebilir. Hiparkos, Rodos ve İskenderiye'de gözlemler yapmış, yazılarında hazırlanmış bir kirişler cetveli bulunmuştur. Bu cetvel, kiriş $2\theta = 2r. \sin \theta$ için sinüsler cetvelinin kaba başlangıcıdır. Hiparkos, stereografik projeksiyon ile kiriş uzunluklarını hesaplamıştır; bu, aralarında üçyüz yıl olmasına rağmen *Almajest* adlı kitabında Hiparkos'dan çok şey ödünç alan Batlamyus'un ifade ettiği ve ispatladığı teoremi bildiğini gösterir.

İkisi arasında M.S. Birinci yüzyılın ikinci yarısında Menelaos vardır. *Spherics* adlı kitabı stereografi ve astronomiden ayrı olarak küresel trigonometri hakkında bir eserdir. Kitap üç bölümdür, ilk bölümde, küresel üçgen açık biçimde tanımlanmış, ve kenarları ve açıları arasındaki ilişkileri veren temel denklemler kurulmuştur.

Almajest'in IX. XI. kitaplarında düzlem ve küresel trigonometrinin mükemmel bir izahı vardır. Sıfırdan 180°ye kadar hep 30 için kirişlerin hesabı yapılmıştır. Henüz sinüsler değil, kirişler kullanılmıştır.

Sinüs fonksiyonlarının ilk ortaya çıkışı Hintde, teorik astronomi eserleri olan *Siddhanta*'larda gerçekleşmiştir, yani, M.S. beşinci yüzyılda ortaya

* Amman, Ürdün.

** Yard. Doç. Dr., Ankara Üniversitesi, Dil ve Tarih-Coğrafya Fakültesi, Felsefe Bölümü, Bilim Tarihi Anabilim Dalı Öğretim Üyesi.

çıkmaya başlamıştır. Bunlar, "ceyb" biçiminde Arapçalaştırılan "cya" ve "civa-barda" kelimeleri dahil, orijinal Hint unsurlarıyla birlikte erken Yunan etkisinin işaretlerini taşır. Arapça ceyb "cep" anlamına geldiğinden, trigonometrik "ceyb" Latinceye sinüs olarak tercüme edilmişti.

Paulisa-Siddhanta'da, trigonometri sinüsleri kullanan bir geometri branşı olarak geliştirilmişti. Sinüsüne eşit en büyük açı olarak düşünülen $3°\ 45'$ ($=225'$)lık fasılalarla 24 sinüslük bir cetvel verilmiştir. Cetvel $\sin(n+1)\,\alpha = 2\sin n\,\alpha - \sin(n\text{-}1)\,\alpha - \frac{\sin n\,\alpha}{\sin \alpha}$, $\alpha = \sin\alpha = 225'$ kuralıyla hesaplanmıştır.

Şimdi, 9. yüzyılda bir sinüsler cetveli veren ilk müslüman Ḥârezmî ile başlayan İslâm dönemini inceleyelim. 9. yüzyılda Ḥabeş el-Ḥâsib sinüs ve tanjant cetvelleri verdi. El-Neyrîzî tanjantları sistemli biçimde kullandı. El-Battânî $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$ kuralı ile $1°$ lik aralıklarla sinüs, tanjant ve kotanjant cetvellerine sahip bir trigonometri serimlemesi bulunan ayrıntılı bir astronomi eseri yazdı.

10. yüzyılda ebû'l-Vefâ trigonometriyi tafsilâtlı biçimde incelemeyi sürdürdü. Sinüslerin hesabı için yeni bir metot vererek küresel üçgenlerde sinüs teoreminin genelleştirilmesini gösterin ilk kimseydi. Sinüs 30 sekiz desimal basamağa kadar doğru verilmiştir. Şunlar tespit edilmiştir:

a- $\sin(\alpha \pm \beta)$

b- $2\sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$

c- $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ kuralları

d- Sekant ve kosekant cetvelleri.

Beyrûnî'nin hocası ebû Naşr da trigonometri konusunda çalışmıştır. Ancak ibn Yûnus 11. yüzyılın en büyük müslüman astronomi ve trigonometricisidir. Küresel astronomi problemlerinin çözümünde ortagonal (dik) projeksiyon kullanmıştır. Bugünkü $\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)] = \cos\alpha\cos\beta$

formülüne eşdeğer bir kural kullanmış ve

$\sin 1° = \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{9}\sin\left(\frac{9}{8}\right)^{\circ} + \frac{2}{3}\cdot\frac{16}{15}\sin\left(\frac{15}{16}\right)^{\circ}$ kuralı ile sin 1°'yi hesaplamıştır.

Ebûl-Vefâ'nın tanjant fonksiyonunu geliştirme gayretlerini devam ettirdiği için Kuşyâr ibn Labbân'dan da söz etmek gerekir.

Fakat bütün bu matematikçileri gözönüne aldığımızda artık, İslâm Dünyasında en büyük trigonometricinin ebû'l-Vefâ olduğuna karar verebiliriz.

BEYRÛNÎ'NİN TRİGONOMETRİSİ

1927 yılında C. Schoy, *el-Ḳânûn el-Mes'ûdî*'de bulunduğu kadarıyla Beyrûnî'nin trigonometrisi hakkında yazdı. 1971 yılında E.S. Kennedy Beyrûnî'nin küresel trigonometri üzerine olan *Meḳâlîd ʿİlm el-Hey'e* adlı eseri hakkında *Journal of Near Eastern Studies*'de altı sayfalık bir yazı yayınladı. Beyrûnî'nin düzlem trigonometri, yani kirişler üzerine olan eseri bilim dünyasınca meçhul değildir. Resâ'il el-Beyrûnî adlı meşhur Hyderabad kolleksiyonunu kısmen ihtiva eder. Bu kısım, kolleksiyonda olduğu gibi, İbrâhîm ibn Sinân'ın eserlerine ilişkin birkaç güç sayfa da kapsar: bunlar konteksi kesintiye uğratmakta ve Beyrûnî'nin eserini izlemeyi güçleştirmektedir. Aynı kısım Rusça incelenmiş, ve öyle anlaşılıyor ki bu güç noktalara işaret edilmeksizin Mısır'da da yayınlanmıştır. Bununla beraber, 1940'ların başlarında, Sinân'ın eserlerinin Beyrûnînkilerle karıştığını belirttiğim, İslâm kültürü üzerine bir yazı yayınladım. Birkaç yıl sonra, bana her iki yazarın eserlerini belirtme imkânı veren bir Hyderabad kolleksiyonu kopyası elime geçti. Beyrûnî'nin kirişler kitabının Leiden kopyesini elde ettim, ancak bunun orijinal metnin çok kısaltılmış bir kopyesi olduğunu anladım.

Eldeki bütün bu meselelerle, bir öğrencim Beyrûnî'nin *İstiḫrâc el-Evtâr*'ini Arapça master tezi olarak hazırladı. Aşağıda, Beyrûnî'nin bu eseri hakkında kısa bilgi verilecektir:

I. Beyrûnî'nin *İstiḫrâc el-Evtâr* Adlı Eseri.

Eserin başlarında Beyrûnî, kirişler yerine sinüslerin kullanılmasını, ve trigonometri kurallarını kolaylaştırmak için yarıçapın birim uzunluğa eşit alınmasını ifade eder. Ancak, anlaşıldığına göre Yunan geleneğini devam ettiren yürürlükteki uygulamaya bağlı kalarak bu iki fikri bir kenara koymuş ve herhangi uzunluktaki (d) çapı ile kiriş uzunluklarını kullanmıştır. Mamafih, (i) kiriş $\theta = 2r\sin\frac{\theta}{2}$ ve (ii) $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$, (yani bütünleyen sinüs) $= \sqrt{1-\sin^2\theta}$ ifadelerini gözönüne alırsak, bunlar Beyrûnî'nin neticilerini değerlendirmede yardımcı olurlar.

Beyrûnî, serimlemesine temel olarak aldığı dört teoreme ispat vererek başlar. Bu teoremler modern terminolojiyle şöyledir:

Bir çember içinde AB>BC olmak üzere iki kiriş verilsin, ABC yayının orta noktası D, ve $DH \perp AB$ olsun. Bu durumda,

Teorem I: AH = HB + BC; yani D orta noktasından kırık ABC çizgisine çizilen dikme doğru parçası üzerindeki gibi çizgiyi iki eşit parçaya böler. Bu teorem için, Arşimet ve M.S. 4. yüzyılda Mısırlı bir Yunanlı olan

Sirenus dahil, bazı Arap, İranlı ve Yunanlılara atfedilen yirmibeş ispat verilmiştir. Beyrûnî bu Serinus'un *Fî Uşûl el-Hendese* (Geometrinin Elemanları Üzerine) adlı bir kitap yazdığını söyler. Bununla beraber biz Sirenus'un konik ve silindirik alanlar üzerine çalıştığını; bildiğimiz kadarıyla başka hiç bir yerde ona geometrinin elemanları üzerine bir eser atfedilmediğini biliyoruz. (Şekil I)*

Teorem II. $AD^2 = DB^2 + AB \cdot BC$

Bu da ABC bir doğru parçası ise geçerlidir. Bu teorem için dört tanesi bizzat Beyrûnî'ye ait olmak üzeri oniki ispat verilmiştir. (Şekil 2).

Teorem IV. $\overset{\triangle}{ADC} - \overset{\triangle}{ABC} = DH \cdot HB$. Burada üç ispat verilmiştir. (Şekil 4).

Teorem III. Burada bilgi değiştirilmiştir: Önceki gibi AD = DC'dir, ancak CB kirişi ADC diliminin dışındadır. Burda $DB^2 = DC^2 + AB \cdot BC$'dir. Burda da üç ispat verilmiştir. (Şekil 3).

Beyrûnî kitabın giriş bölümünde Râzî'nin, her teorem için birkaç ispat vermesine itiraz ettiğini söyler. Kızgın biçimde, geçmiş ve hali hazırdaki matematikçilere atfedilen ispatları vermesinin kendisinin ve onların hoşuna giden bir çeşit hatıra olduğu cevabını verir. Biz Râzî'nin görüşüne saygı gösterebiliriz, ancak Beyrûnî'ye teşekkür borçluyuz, çünkü aksi taktirde onun söz konusu ettiği matematikçileri ve çözümlerini bilmeyecektik.

Beyrûnî'nin kendi çözümlerinin bazılarının en kısa ve en kolay olduklarına işaret etmeye değer.

1. A ve B gibi verilen iki noktadan ACB = bilinen bir açı, ve AC + BC = bilinen bir uzunluk olmak üzere AC, BC çizgilerini çizmek.

Beyrûnî Menelaos, ibn Kurra ve ebû'l-Cûd'unkinden daha kolay, ve el-Siczî'ninkinden daha uzun olmayan bir metot verir.

2. Yukarıda verilenler geçerlidir, ancak burada AC − BC = bilinen bir uzunlukdur. İki metot verilmiştir.

3. Yine yukarıdaki veriler geçerlidir, ancak $AC \cdot BC$ = bilinen bir alandır. İki metot verilmiştir.

4. Burda AC:BC = bilinen bir orandır.

5. Verilen bir çember içine, çevresi bilinen bir uzunluğa eşit olan bir üçgen çizmek.

Şimdi de şunların ispatları verilmiştir:

a) Kenarları bilinen bir üçgenin köşelerinden karşı kenarlara çizilen dikmelerin uzunluklarının bulunması. Beyrûnî Arşimet'in bir ispatını verir ve bunu daha kısaltan bazı çizimler ekler.

* Bu makalenin şekilleri için İngilizce metin sonuna bakınız.

b) Kenar uzunlukları bilinen bir üçgenin alanının bulunması. Arşimet'in bir ispatı verilmiştir.

c) Kenar uzunlukları verilmiş çevrimsel bir dörtgenin alanının bulunması. 'Abdullâh el-Shannî'den aldığı bir Hint metodunu verir.

Yukarıdaki teoremlerin uygulamasını bazı astronomi problemleri ve çözümleri takip eder. Cebir kitaplarında yaygın olduğu söylenen bir problem ile bunlar sona erer: İki kuş, yükseklikleri bilinen iki ağacın tepesinden bir balık görürler; aynı hızla balığa atılırlar, ancak aynı zamanda balığa ulaşırlar; ağaçlar genişliği bilinen bir nehrin karşılıklı kenarlarındadır; ağaçlar arasında balığın yerinin bulunması istenmektedir.

Düzlem Trigonometrinin Kuralları

Yukarıda bahsedilenler düzlem trigonometriye giriştir ve düzlem trigonometrinin kurallarını çıkarmak için kullanılır. Burada yine bir $\theta = 2r\sin\frac{\theta}{2}$ olduğunu söylerim. θ için Beyrûnî tam bir dairenin $\frac{1}{\alpha}$'sı anlamına gelen $\frac{1}{\alpha}$ 'yı kullanır. Bu, 360° nin 1/6'sı için 1/6, yani 60° olur. Şu kuralları verir:

1. Kiriş $\frac{1}{6} = r$. Bu, bizim için kiriş $60° = 2r\sin 30° = r$ demektir. Böylece $\sin 30° = 1/2$ olur. Bu $\cos 30° = \sin 60° = \sqrt{1-(1/2)^2} = \sqrt{3}/2$ sonucuna da götürür.

2. Kiriş $\frac{1}{10} = \sqrt{5r^2/4} - r/2$. Burdan $\sin 18° = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)$ olduğunu çıkarabiliriz, ve böylece $\cos 18° = \sin 72°$ çıkarılabilir.

3. Kiriş $(180° - \theta) = \sqrt{\alpha^2 - \text{kir}^2\theta}$, burdan $\cos^2\theta = 1\text{-}\sin^2\theta$ elde edilir.

4. $\text{Sin}\, 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ neticesini veren kiriş 2θ için bir kural.

5. $\text{Sin}\frac{\theta}{2} = \sqrt{1-\sqrt{\cos\theta}/2}$ neticesini veren kiriş $\frac{\theta}{2}$ için bir kural.

Böylece dördüncü ve beşinci kurallar 30° ve 18°nin ardışık çift katlarının ve ardışık yarılarının sinüs ve kosinüslerini bulmayı kuramsal olarak mümkün kılar.

6. Kiriş $\frac{1}{8} = \sqrt{2r^2 - 2r\text{kir}\ 1/4}$, bu $\sin 22\frac{1}{2}° = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ve ve $\sin 45° = 1/\sqrt{2}$ neticelerini verir.

7,8. Kiriş $(\alpha\pm\beta)$. Bunları $\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ olarak yorumlayabiliriz. Böylece, verilen sin 18° ve 15° den, sin 3° ve cos 3° bulunabilir, ve bu nedenle bunların ardıl çift katları ve yarılarının sinüsleri ve kosinüsleri de bulunabilir.

9. Kiriş $\frac{1}{2}$ $(\alpha + \beta)$ da elde edilmiştir.

Böylece aritmetik işleminin neticelendirebildiği karekök basamağına kadar dakik uzun bir sinüs ve kosinüsler cetveli düzenlenebilmişti. Fakat yukarıdaki dokuz kurala dayanarak yapılan olabildiği kadar uzun bu cetvel kiriş 1°'yi vermez.

Burada yukarıdaki kuralın ispatlarının çözümünün Beyrûnî'nin olduğunu söylemeliyiz; onun olmayan az miktarı ibn 'Irâḳ'a atfedilmiştir.

Kiriş 1°'yi bulmak için, ilk defa kiriş θ biliniyorken $\theta/3$'ü geometrik olarak bulmamız gerektiğni söyler. Ancak hiç kimse açıyı üçe bölmeyi başaramamıştır. Bazıları bunu yaklaşık olarak yapmıştır. Filozof Kindî'nin âlet kullanarak bunu yaptığını, halbuki zamanımızdakilerin hiperbolün özelliklerini kullandıklarını söyler. Bütün bu metotlar sabit aritmetiksel bir netice vermez. Başka bir yaklaşık çözüm önerir ve Ḥabeş'in *Zîc*'ine yaptığı şerhde başka bir yaklaşık çözüm verdiğini söyler. *Ḥaṣr el-Ṭurûḳ el-Sâ'ire fî İstiḫrâc Evtâr el-Dâ'ire* (Çember Kirişlerini Hesaplamanın Geçerli Yöntemleri Kolleksiyonu) adlı eserinde, bütün eski ve daha yeni matematikçilerin metotlarını ilâve ettiğini söyler.

Sonuç olarak, kolay ispatlar sunmuş olmasına rağmen, verdiği düzlem trigonometri kurallarının ondan önce keşfedilmiş olduğunu söyleyebilirim. Basit ispatlar sunmaktan başka, kitabında düzlem trigonometriyi matematiğin astronomiden ayrı bir dalı olarak sunduğu yargısına haklı olarak lâyıktır.

Kâtib, Beyrûnî'nin kirişler üzerine olan bu eseri Hicri 418 yılının Recep ayında (8 veya 9/1027) tamamladığını söyleyerek bitirmekte.

II. Beyrûnî'nin *Meḳâlîd 'İlm el-Hey'e Adlı Eseri*

Bu kitap Beyrûnî'nin küresel trigonometri konusundaki eseridir. Arapçada mekâlîd anahtarlar, 'ilm el-hey'e ise (matematiksel) astronomi bilimi demektir. Böylece kitabın adı matematiksel astronominin anahtar prensipleri anlamına gelmektedir. Ancak eser, astronomi problemleri için anahtar prensiplerin bazı uygulamaları dışında yalnızca küresel trigonometri üzerinedir.

Daha önce Kennedy'nin bu eser üzerine kısa bir inceleme yayınladığını söylemiştim. Yakınlarda, bu eserin Fransızca tercümesiyle birlikte tam bir incelemesinin Marie-Thérése Debarnot tarafından yayınlandığını öğrendim. Aşağıda, eserdeki küresel trigonometrinin bir özeti verilmektedir.

O zamanki hamisi Marzubân ibn Rüstem ibn Şirvân'a övgüler sıraladığı uzun bir giriş bölümünden sonra, Beyrûnî, bir küre yüzeyinde büyük çemberler kesiştiğinde, açılar meydana getirdiklerini söyleyerek konuya başlamakta. Bu çemberlerdeki bilinmeyenleri, ya da birbirlerine oranlarını bulmak için, keşişen büyük daire yaylarının oluşturduğu el-ḳaṭṭâ' denilen şekle müracaat etmeyi gerektiren sinüsleri arasındaki oranlara başvurmak zorundayız. Batlamyus *Almajest*'in birinci kitabında, Menelaos *Küreler* adlı kitabında bu şekilden (el-ḳaṭṭâ'dan) söz etmişlerdir. Fakat el-Neyrîzî ve el-Ḫâzin *Almajest* şerhlerinde bunu geliştirmişlerdir. El-Ḫâzin *Zîc el-Şefâ'ih*'de, İbn 'Irâḳ da *Tehzîb el-Te'âlîm*'de bunu kısaca kopye etmişler; İbn Ḳurra bu şekil hakkında bir bütün kitap yazmıştır. Bağdâdî, ibn 'İşmet, el-Sîczî vd. gibi daha sonraki yıllardan pek çok bilim adamı bu şekil üzerinde gayretle çalışmışlardı.

Fakat pek çok çelişkili noktalar bulduğumuz içinde yaşadığımız çağda yoğun bilimsel bilgi ve daha öncekilerin çözemediği problemleri çözme kabiliyeti kıskançlık ve objektif olma noksanlığı ile kuşatılmıştır. Her buluşu onu hak eden kimseye atfederek, Beyrûnî şeklin özelliklerini sunmaya devam eder.

Siczî'nin, ispatlarla desteklenmemiş ve farklı bütün neticeleri vererek âletlerin yardımıyla kıble yönünü ve azimutunu bulmak için geometrici ve astronomlara uygun bazı metotlar elde ettiğini söyler. Beyrûnî ona hocasının, yani iİbn 'Irâḳ'ın ispatla destekli doğru bir metot çıkarabileceğini söylemiştir. Siczî'nin isteği üzerine Beyrûnî ibn 'Irâḳ'dan problemi çözmesini istemiştir. Netice, içinde le-ḳaṭṭâ''ın özelliklerinin sırası geldikçe sunulduğu, İbn 'Irâḳ'ın yazdığı *el-Sumût* adlı azimutlar kitabıydı. Düzlem geometride tam dörtgenin küresel yüzeyde bu şekil olarak kabul edilebileceğinin farkındadır, her iki şekil de karşılıklı ikişer kenarları birleştirilerek elde edilmiş dörtgenlerdir. Tam küresel dörtgen *şekl el-ḳaṭṭâ*''dır.

Beyrûnî, ebû'l-Vefâ el-Buzcâni'nin kendisinden söz konusu kitabı göndermesini istediğini söyleyerek devam eder. Kitap Buzcâni'nin eline Bağdat'da ulaşmıştır. Kitabı takdir etmiş, ancak kendisi azimutu hesaplamak için kolay metotlar kullandığı halde, bu kitabın yazarının sözkonusu şeklin özelliklerini verirken eski metotları kullandığını söylemiştir.

Buzcâni ve ibn 'Irâḳ her ikisi de ayrı ayrı bu konuyu geliştirmişler ve ulaştıkları neticelerden Beyrûnî'yi haberdar etmişlerdir. Beyrûnî *Meḳâlîd*'de sunduğu metotları elde etmek için bu bilgileri kullanmıştır. Rey şehrinde, içinde el-ḳaṭṭâ''ın yeni ispatlarla sunulduğu bir kitabını kendisine gösteren al-Ḫuendî ile tanıştığını söyleyerek devam eder. Kuşyâr'ın, içinde el-ḳaṭṭâ''ın yerini hemen bütünüyle daha basit metotların aldığı bir kitap yazdığnı da keşfetmiştir.

Öyle anlaşılıyor ki ebû'l-Vefâ, ibn Irâḳ'ın *el-Sumût* kitabının bazı kısımlarının kendisine ait olduğunu iddia etmiştir. El-Ḫucendî ise ebû'l-Vefâ'nın kitabı üzerinde kısmen hak iddia etmiş; Kuşyâr bütün yaptığının kısaca başkalarının başarılarını bir araya getirmek olduğunu itiraf etmiştir. Beyrûnî, yalnızca ibn 'Irâḳ'ın kendi başarılarına başkalarının sahip çıkmasına önem vermeyecek kadar cömert ve mütevazi olduğunu söylemektedir.

Beyrûnî şimdi yukarıda sözkonusu edilen meslektaşlarının teorem ve ispatlarını sunar. Bunlar şöyledir:

1. Birbirini kesen iki düzlemden biri üzerinde verilen bir noktadan iki çizgi çizilir: Diğer düzlem üzerinde bir dikme, ve iki düzlemin ara kesitine bir dikme çizilir, iki dikmenin ayaklarını birleştiren çizginin de ara kesite dik olduğunun ispat edilmesi gerekmekte.

Teorem ve ispat ibn 'Irâḳ'a atfedilmiştir; ancak Beyrûnî kendisine ait başka bir ispat da ekler.

2. A, B, C, DB çaplı bir çember üzerinde verilmiş noktalardır. Eğer bu çap ve AC çizgisi H noktasında kesiştirilirse, $\frac{AH}{HC} = \frac{\text{Sin arc BA}}{\text{Sin arc BC}}$ olur.[1]

Teorem sinüsleri değil kirişleri kullanmış olması gereken Batlamyos'a atfedilmiştir. Ebû'l-Vefâ'nın bir ispatı verilmiştir.

3. Bir küresel üçgenin kenarlarının sinüsleri arasındaki oran, karşılıklı açıların sinüsleri arasındaki orana eşittir.

Teorem ibn 'Irâḳ'a atfedilmiştir; Beyrûnî onun ispatına kendisinin başka bir ispatını ekler. İbn 'Irâḳ'ın ikinci bir ispatı da sunulmuştur.

4. Ebû'l-Vefâ tarafından ispatlarıyla iki teorem verilmiştir. Birincisi: Bir küre üzerinde iki büyük daire yayı bir dar açı oluşturarak birbirini kesmekte; ilk yay üzerinde rastgele dizilmiş noktalar olsun. Bu noktaların her biriyle dar açının tepe noktası arasındaki yayların sinüslerinin, eğimleri arasındaki oranla aynı oranda olduklarının ispatlanması istenmekte. (AC yayı üstündeki AB yayının eğimi, B'den AC'ye dik yaydır).[1] Ebû'l-Vefâ iki ispat vermiştir.

[1] Buradaki şekil yazar tarafından verilmemiştir. Bu metindeki şekil 1,2,3, ve 4 de kızı Amal S. Saidan tarafından gönderilmiştir.

Beyrûnî bu teorem için kendisine ait bir ispat ekler. Bu, el-ḳaṭṭâ‘ dan vazgeçiren şekil, el-şekl el-Mugnî denen teoremdir.

5. Ebû'l-Vefâ'nın ikinci teoremi şöyledir:

Mugnî'de yaylar, yani daireden kesilen eğimler, bu eğimlerin tanjantlarıyla aynı oranda sinüslere sahiptir.

Önce Beyrûnî tanjant ve ters tanjant ile ne kastedildiğini takdim eder, ve ebû'l-Vefâ için, ve bütün kitapta nerede tanjant varsa bunun ters tanjant anlamında olduğunu ekler.

Burada Beyrûnî zill el-miḳyâs denen gnomonun tanjantını takdim eder, ve nasıl bulunacağını gösterir. Gnomonun gölgesi yere düştüğünde, tanjant, yani gölgenin uzunluğu düzlem tanjanttır. Eğer gölge dikse, uzunluğu ters tanjanttır. (Bu ters tanjant gerçekte bizim anladığımız tanjanttır; düzlem tanjant bugün kotanjant dediğimizdir. Kotanjant, dik bir düzlem üzerinde yatay bir çizginin gölgesidir, düzlem tanjant ise yatay bir düzlem üzerinde bir dik çizginin gölgesidir. Arapçada tanjant ve gölgeye her ikisine de zill dendiğine dikkat edilmelidir.)

6. Bu, el-şekl el-zillî denen, yani yüzeysel şekildir; ebû'l-Vefâ'ya atfedilmiştir, ifadesi şöyledir:

Eğer bir küre üzerinde iki büyük daire bir dar açı oluşturarak birbirini keser, ve bunlardan birinin yayı üzerine noktalar konur, ve iki kutbu birleştiren büyük daire yayları bu noktalardan geçerse; bu yayların sinüsleri arasındaki oran bunların yüksekliklerinin tanjantları arasındaki orana eşittir. Burada Beyrûnî'nin yükseklik dediği ebû'l-Vefâ'nın ikinci eğim dediği şeydir.

Aynı teorem için İbn 'Irâḳ. *El-Sumût* adlı kitabında iki ispat vermiştir. Al-Kucandî başka bir ispat ve Kuşyâr kısaltılmış bir ispat vermiştir. Neyrîzî, el-Hâzin ve Beyrûnî birer ispat vermişlerdir.

Küresel Üçgenler

Beyrûnî'nin küresel üçgenleri takdimi, bunları yayları arasındaki açılara göre aşağıdaki on eşite sınıflandırarak başlar: 1. Üç dar açı; 2. Üç dik açı; 3. Üç geniş açı; 4. İki dar, bir dik açı; 5. İki dar, bir geniş; 6. İki dik, bir dar; 7. İki dik, bir geniş; 8. İki geniş, bir dar; 9. İki geniş, bir dik; 10. bir dar, bir dik, bir geniş açı.

Birinci çeşitin sekizinci çeşite karşılıklı dik, ve üçüncü ve beşinci eşitle, dördüncü ve dokuzuncunun da karşılıklı dik olduğunu gösterilerek küre üzerinde karşılıklı dik üçgenlerden söz edilmiştir. Geriye kalan dört çeşit ise her biri kendi kendisiyle diktir, yani ikinciyle, ve yedi, sekiz ve onuncu çeşitler kendileriyle karşılıklı dik üçgenlerdir.

Böylece herhangi bir üçgen çözüldüğünde, yani altı elemanının hepsi bilindiğinde, ona karşılıklı dik olan üçgen de bilinir. Şu halde gerçekte 1,3,4,2,7 ve 8 inci çeşitlerin çözümlerini gözönüne almamız gerekir. Beyrûnî dördüncü çeşitle, yani C açısı dik olan ABC üçgeni gibi bir dik ve iki dar açılı bir üçgenle başlar. Altı bilinen elemanın üç tanesi verilerek, üç bilinmeyenin hesaplanabileceği durumları göstermek için bir çizelge yapılmıştır. Çözüm ḳaṭṭâ'a dayanır. AC ve AB, her biri bir büyük dairenin dörtte biri olan AD ve AE'yi oluşturarak D ve E'ye uzatılır. Z'ye uzatılan CB yayını kesen A merkezli ve AD yarıçaplı bir DEZ yayı çizilir. Böylece bir ADZB ḳaṭṭâ'ı oluşur. Benzer şekilde BHKA ḳaṭṭâ'ı oluşturulur. Böylece DE = A, EZ = 90° – A, TH = B, TK = 90° – B, AE = C = 90° olur (Şekil 5).

C = 90° olmak üzere, eğer iki kenera, bir kenar ve bir açı, ya da iki açı verilirse, üçgen çözülür, ve bütün ADZB ḳaṭṭâ'ı bilinir. Asıl formül, kenarların sinüsleri oranı açıların sinüsleri oranına veya eğilimlerinin sinüsleri oranına eşittir. Diğer çeşitler, yani 1, 3 ve 10. çeşitler de benzer şekilde gözönüne alınır.

Beyrûnî'nin *Meḳâlîd* adlı eserinin kalan bölümlerinde, ebû'l-Vefâ'nın Mugnî'sinden yararlanılarak astronomi problemleri tartışılır. Bu problemlere şu örnekler verilebilir: Ekliptiğin herhangi bir derecesinin ekvatordan eğimini bulmak, herhangi bir derecenin yüksekliğini bulmak, yücelimlerini, açılımlarını, günün denklemini vs. hesaplamak. Bu kısımlar aslında eserin yarısından çoğunu kapsar, böylece astronomi kitabı anlamına gelen adını doğrular.

Sözkonusu edilecek bir nokta daha var. İbn el-Heysem'in yazdığı gerçekte bir el-ḳaṭṭâ' incelenmesi olan *el-Ehille* adlı eserden Beyrûnî bahsetmemiştir, ve öyle görünüyor ki bu eseri bilmiyordu. İslâm matematikçilerinin küresel trigonometri konusundaki çalışmaları üzerine yapılacak tafsilâtlı bir incelmenin, Beyrûnî'nin bahsettiği matematikçilerle birlikte Heysem'in eserlerini de kapsaması gerektiğine inanıyorum.