İSMAİL GELENBEVÎ'NİN *ÜÇGENLERİN KENARLARI* ADLI RİSALESİ

REMZİ DEMİR*

GİRİŞ

Osmanlı matematik tarihini —ve bu arada bilim tarihinin diğer şubelerini de— aydınlatmanın en kısa ve en güvenilir yolu, öncelikle, bu sahada kaleme alınmış olan yazma ve basma eserlerin tenkitli neşirlerini, tercümelerini (veya günümüz Türkçesine dönüştürülmüş biçimlerini) ve mümkün olduğu ölçüde güvenilir olan (ve bir anlamda bu eserlerin bilim tarihindeki yeri ve değerini anlamamızı kolaylaştıran) tahkiklerini ve değerlendirmelerini hazırlamaktır. Bu faaliyet, sahanın bütün ilmî eserlerini kapsayacak boyutlara ulaşmadıkça, Osmanlı matematik tarihinin tam manasıyla aydınlatılması imkânsız olacaktır.

Bugüne değin, aritmetik, geometri, cebir veya trigonometri tarihimizi alâkadar eden yazma veya basma herhangi bir eserin, yukarıda kısaca temas edilen hususlar çerçevesinde yayınlanmamış olması nedeniyle, Osmanlı matematik tarihine ilişkin genel malumatımız, sadece, ünlü bilim tarihçilerimizden Salih Zeki Bey'in *Âşâr-ı Bâkıye*[1] adlı abidevi eserinde yer alan hüküm ve değerlendirmelerle sınırlı kalmış ve onun vefatından sonra bu konuya önemli denilebilecek nitelikte katkılar yapmak mümkün olmamıştır.

Bugün, Osmanlı matematik tarihinin hakkıyla bilinmesi bir tarafa, *Âşâr-ı Bâkıye*'nin ulaşmış olduğu sonuçların sıhatinin dahi gerektiği gibi kontrol edilebilmesi için metin neşrine büyük bir ihtiyacımız olduğu aşikardır.

Bu sahaya ilişkin yazma ve basma eserleri, bilimsel düzeyleri itibariyle iki sınıfa ayırmak mümkündür:

*Yard. Doç. Dr., Ankara Üniversitesi, Dil ve Tarih Coğrafya Fakültesi, Felsefe Bölümü.

[1] Salih Zeki, *Âşâr-ı Bâkıye*, Cilt I-II, Istanbul 1329, bu eserin cildi trigonometri tarihine, ikinci cildi ise aritmetik ve cebir tarihine tahsis edilmiştir.

1. **Özgün eserler:** 16'ıncı yüzyılın meşhur Osmanlı matematikçilerinden Takiyüddîn ibn Mʿarûfun *Buğyetü't-Tüllâb min ʿİlmi'l-Hisâb*[2] adlı eseri gibi, matematiğe önemli katkılarda bulunmuş, deha ve azim örneği olan eserler bu türden eserlerdir. Bunların mümkün olduğunca özenli bir şekilde değerlendirilmesi ve matematik tarihindeki yerlerinin isabetli olarak belirlenmesi gerekir.

2. **Yararlı eserler:** Bu çalışmamızın konusu olan İsmail Gelenbevî'nin *Üçgenlerin Kenarları* adlı eseri gibi matematiğe önemli bir katkısı olmayan, ancak birinci türden eserlerin anlaşılmasında bilim tarihçilerine yardımcı olan ve yol gösteren eserlerdir. Bu tip eserler iki yönden yararlıdır:

a) Yazıldıkları dönemde kullanılan matematik terimlerini ve yöntemlerini öğrenmemizi mümkün kılarlar.

b) Dönemin matematik bilgisinin mahiyeti ve seviyesi hakkında fikir verirler.

Osmanlı matematik tarihinin, Salih Zeki'nin incelemelerine rağmen, oldukça bakir bir saha olması ve özgün eserlerin ilk planda hakkıyla değerlendirilmesi güçlüğü, ikinci türden eserlerin önemini arttırmaktadır. Matematik tarihimize ilişkin bilimsel faaliyetlerin sağlam ve güvenilir bir zemine oturtulabilmesi için, bize birçok yönden rehber olacak bu tip eserlerin hazırlanmasına öncelik vermek mecburiyetindeyiz. Böylece, eşyanın tabiatına uygun olarak basitten mürekkebe doğru gidilecek ve hata yapma ihtimali asgariye indirilebilecektir.

Onsekizinci yüzyılın isim yapmış matematikçilerinden biri olan İsmail ibn Mustafa ibn Mahmud el-Gelenbevî'nin (1730-1791) *Üçgenlerin Kenarları* adlı basma eserini yayına hazırlarken, esas amacımız, aslında böyle bir ihtiyaca dikkat çekmektir.

İSMAİL GELENBEVÎ'NİN HAYATI VE BİLİMSEL ESERLERİ

A — HAYATI:

İsmail Gelenbevî, 1730 yılında bugün Manisa ilimizin ilçelerinden biri olan Gelenbe'de doğmuş ve ilk eğitimin burada tamamladıktan sonra İstanbul'a gelerek Fatih Külliyesi'ne girmiştir. Burada devrin ileri gelen âlim-

[2] Osmanlı matematiğinin en seçkin eserlerinden biri olduğu anlaşılan *Buğyetü't-Tüllâb*, özellikle ondalık kesirler konusuna yapmış olduğu katkılar nedeniyle ilgi çekicidir. Bu eser, kısmen tarafımızdan incelenmiştir; bkz., *XVI. Yüzyılın Ünlü Astronomu Takiyüddin'in Desimal Sistemi Trigonometri ve Astronomiye Uygulaması*, Ankara 1991, (Yayınlanmamış doktora tezi).

lerinden Yasincizâde Osman Efendi'den naklî ilimleri ve 'ayaklı kütüphane' lakabıyla tanınan Müftüzâde Mehmed Emin Efendi'den ise aklî ilimleri öğrenmiştir. Eğitimini tamamladıktan sonra, 1763 yıllarında açılan ruûs imtihanında başarılı olmuş ve müderris olarak tayin edilmiştir.

Ömrünü maddi sıkıntılar içinde geçiren Gelenbevî, I. Abdülhamid devrinde (1774-1789) Sadrazam Ispartalı Halil Paşa'nın himmeti ve Kaptan-ı Derya Cezayirli Hasan Paşa'nın tavsiyesi üzerine, 1784 yıllarında Mühendishâne-i Bahrî-i Hümâyûn'a altmış kuruş aylıkla matematik öğretmeni olarak tayin edilmiş ve böylelikle kısa bir süre de olsa rahata kavuşmuştur. Gelenbevî muhtemelen 1790 yılına kadar bu görevde kalmış, bu tarihte Mora'daki Yenişehir'e kadı olarak gönderilmiştir. Bu görevini sürdürürken, Şevval ayının gurresinin, yani birinci gününün tesbitinde *şahitlerin* değil hesapların şehadetine itimat ettiği için devrin Şeyhü'l-İslâmı Hamidizâde Mustafa Efendi'nin çok sert bir tektirnamesine muhatap olmuş ve bundan çok müteessir olarak 1791 yılında orada vefat etmiştir.

B — BİLİMSEL ESERLERİ

İsmail Gelenbevî'nin burada takdim ettiğimiz *Üçgenlerin Kenarları* adlı risalesinin dışında kalan eserleri şunlardır:

1. *Ḥisâbü'l-Küsûr*
2. *Şerh-i Cedâvil-i Ensâb* (veya *Logaritma Şerhi)*
3. *Uṣûl-i Cedâvil-i Ensâb-ı Sittînî*
4. *Risâle fî Resmi'l-Mizvele ve'l-Münḥarife*
5. *Risâle fî Sutûḥi'l-Münḥarifât*
6. *Risâle Rubʿi'l-Müceyyeb*
7. *Kitâbü'l-Merâṣıd*

Bu eserler arasında en çok söz konusu edileni ve en iyi bilineni *Logaritma Şerhi* ismiyle tanınan *Şerh-i Cedâvil-i Ensâb*'dır. Logaritmayı tanıtmak maksadıyla kaleme alınmış olan bu ilk müstakil eserden önce, Kalfazâde İsmail Çinarî Efendi, *Tuhfe-i Behîc-i Rassini Tercüme-i Zic-i Kassini* adlı tercümesinin başında logaritmaya yer vermiş ve logaritma cetvellerinin kullanımını ayrıntılarıyla anlatmıştır. Bugüne kadar her iki eserin de tenkitli neşri hazırlanmamıştır.[3]

[3] Gelenbevî'nin hayatı ve eserleri hakkında daha ayrıntılı bilgi için bkz., Salih Zeki, Cilt II, s. 294-301; A. Adnan Adıvar, *Osmanlı Türklerinde İlim*, 5. basım, İstanbul 1991, s. 203-204; Abdulkuddûs Bingöl, *Gelenbevî İsmail*, Ankara 1988.

C — ÜÇGENLERİN KENARLARI

Matbu nüshada İsmail Gelenbevî'nin bu küçük risalesinin ismine rastlanmaz. Kaynaklar ise *Adlâʿ-ı Müşelleşât (Üçgenlerin Kenarları)* olduğu konusunda ittifak halindedir. Fakat kitabın içeriği, trigonometrik ve geometrik yollarla üçgenlerin kenar ve açılarının bulunması, yani üçgenlerin çözümlenmesi ile ilgili olduğundan bu isim pek de isabetli görünmemektedir.

Üçgenlerin Kenarları, üçgen çözümlerinde kullanılan üç teoremin, yani pisagor, tanjant ve sinüs teoremlerinin ayrıntılı bir şekilde tanıtılması maksadıyla kaleme alınmış olup, bir giriş, üç fasıl ve bir sonuç bölümüne taksim edilmiştir. Giriş'te geometri ve trigonometriye ilişkin temel terimlerin tanımlandığı ve tanjant teoremi ile sinüs teoreminde kullanılan 'oranlanmış dörtlü'nün, yani a/b = c/d orantısının tanıtıldığı görülmektedir. Birinci Fasıl'da dik üçgenlere mahsup olan Pisagor Teoremi' (Gelin Teoremi), İkinci Fasıl'da yine dik üçgenlere mahsus olan 'Tanjant Teoremi' ve Üçüncü Fasıl'da ise her üçgende geçerli olan 'Sinüs Teoremi' (Doyuran Teorem) tafsilatlı ve teferruatlı bir şekilde tarif edilmiş ve verilen örneklere konuların daha iyi anlaşılması temin edilmiştir. Diğer bölümlere nisbetle oldukça geniş tutulan Sonuç bölümünde, üçgenlerin çözümlenmesinde yardımcı olacak bazı özelliklerden basedilmektedir.

Çok anlaşılır bir ifade ile kaleme alınmış olan bu eserin ne zaman tamamlandığını bilemiyoruz. İstanbul'da Miladi 1805-6 yılında Darü'l-Tibaa'da basılmış olup, 79 küçük sahifeden mürekkeptir ve her sayfasında 17 satır mevcuttur.

Eserin bilim tarihi açısından en önemli görünen yönlerini şöylece sıralamak mümkündür:

1. Eserin yazılış maksadı, geometrik ve trigonometrik bağıntılar kullanmak yoluyla üçgenlerin nasıl çözümlenebileceğini, yani üçgenlerin bilinen kenar ve açılarından yararlanılarak bilinmeyen kenar ve açılarının nasıl bulunabileceğini izah etmektir. Gelenbevî'nin Mühendishâne-i Bahrî-i Hümâyûn'da kuramsal geometri desleri verdiği hatırlanacak olursa,[4] bu risalenin bir ders kitabı olarak kaleme alınmış olması ihtimali belirecektir. Eserin anlatım yalınlığı bu ihtimali güçlendirmektedir.

2. Giriş'te bir yayın sinüsünü veya tanjantını orantı yoluyla bulmanın mümkün olmadığına dikkat çekilmekte ve gerekçesi gayet güzel bir şekilde ifade edilmektedir.

[4] Ekmeleddin İhsanoğlu, "Tanzimat Öncesi ve Tanzimat Dönemi Osmanlı Bilim ve Eğitim Anlayışı", *150. Yılında Tanzimat*, yayına hazırlayan: Hakkı Dursun Yıldız, Ankara 1992, s. 348.

3. Basma nüshanın 15'inci sahifesinin kenarına çizilmiş olan dik üçgenin dışında, risalede herhangi bir çizime rastlanmaz. Ancak anlatım inceliği örneklere ilişkin şekillerin tasavvur ve çizimini kolaylaştırmaktadır.

4. Gelenbevî'nin hesaplama yöntemi tamamen sözeldir; hiçbir yerde hiçbir vesile ile bir işlem simgesi kullanmamış, sayıları bile, çoğu kere rakamlarla değil okunuşları ile ifade etmiştir. Açı yaylarının büyüklükleri bildirirken kullandığı rakamlar ise ebced rakamlarıdır.

5. Yayların derece ve dakikalarını, trigonometrik fonksiyonların tam ve kesirli kısımlarını birbirlerinden ayırmak için de simgelerden yararlanmamış, sadece hangi mertebede bulunduklarını söylemekle yetinmiştir.

6. Kesirleri ifade ederken genellikle altmışlık kesirleri kullanmış, bir iki yerde ise bayağı kesri tercih etmiştir. Bu risalede, Takiyüddin'in yaklaşık olarak iki asır önce mükemmel bir şekilde izah ettiği ve kullandığı ondalık kesirlerden hiçbir ize tesadüf olunamaması oldukça şaşırtıcıdır ve bu durum Takiyüddin'in bilimsel faaliyetlerinin, 16'ıncı yüzyıldan sonra, Osmanlı matematikçileri tarafından gerektiği gibi değerlendirilemediği izlenimini uyandırmaktadır. Bu konuda kesin bir hükme varabilmek için, Gelenbevî'nin matematiğe ilişkin diğer eserlerinin de dikkatli bir şekilde incelenmesi gerekmektedir.

7. Yukarıda zikredilenlerin dışında, $r = 1$ kabul edilmek kaydıyla, bu risalede mevcut olan diğer önemli trigonometrik bağıntılar ise şunlardır:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$$

$$\text{sehm } A = 1 - \cos A$$

$$\text{kiriş } A = \sqrt{\sin^2 A + \text{sehm}^2 A} = \sqrt{\sin^2 A + (1 - \cos A)^2}$$

$$\sec A = \text{tg}\left(\frac{A}{2} + 45°\right) - \text{tg } A$$

$$\sec A = \frac{\text{tg}A}{\sin A} = \frac{1}{\cos A}$$

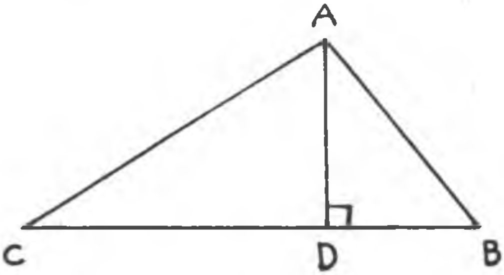
Ancak İsmail Gelenbevî, yarıçapı 60 birim kabul ettiği için, bu bağıntılardaki bazı sadeleştirmeleri yapamamıştır.

8) Gelenbevî, Sonuç bölümünün Dördüncü Fayda'sında, şekildeki ABC geniş açılı üçgeninde, AD dikmesi ile iki kısma ayrılan BC uzun kenarının söz konusu DB ve CD kısımları ile üçgenin kısa kenarlarından biri-

nin (AB) bilinmesi halinde, bilinmeyen diğer kısa kenarın (AC), dikme uzunluğu ile açılara müracaat olunmaksızın,

$\overline{CD}^2 - \overline{DB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$

bağıntısı ile bulunabileceğini ve bunun kendi zekasına ait icatlardan birisi olduğunu söylemektedir. Bu bağıntı, pisagor teoreminden yararlanılarak bulunmuştur:



ADC dik üçgeninde,

$\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2$

ADB dik üçgeninde ise,

$\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = \overline{AB}^2$

olduğundan ikinci eşitlikte $\overline{AD}^2$'yi çekip birincide yerine korsak,

$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{DB}^2$

$\overline{AB}^2 = \overline{DB}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2$

$-\overline{DB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$

ve düzenlersek,

$\overline{CD}^2 - \overline{DB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$

eşitliğine ulaşırız.

ÜÇGENLERİN KENARLARI
İSMAİL GELENBEVÎ

ÜÇGENLER

Esirgeyen ve Bağışlayan Allah'ın Adıyla

Âlemlerin rabbi olan Allah'a hamdederim. Nebi ve resullerin başı Muhammed'e ve ailesi ve ashabına salat ve selam olsun.

Matematiksel bilimlerle ilgilenen kimselerin astronomi ve geometri hesaplamalarında muhtaç oldukları üçgenlerin kenar ve açılarını araştırmak suretiyle çıkarsamak için üç tane teoremleri vardır: Bunlardan birisi Gelin Teoremi (Şekl-i Aʿrûs) ve diğeri ise Tanjant Teoremidir (Şekl-i Zillî). Bu iki teorem dik açılı üçgenlere mahsustur. Üçüncüsü ise, Doyuran Teoremdir (Şekl-i Muġnî). Dik açılı üçgenlere mahsus olmayıp her üçgende geçerlidir. Lakin bazı durumlarda önceki iki teoreme muhtaçtır. Onun için eskiler gelin teoremi ile tanjant teoremine daha fazla itibar etmişlerdir.

GİRİŞ

Bir düzlem yüzey üzerinde, iki tane doğru çizgi birbirlerine kavuştuklarında iç tarafta oluşan köşeye açı derler.[1] Şimdi, bu köşe merkez kabul edilip, bu çizgiler ile kesişen bir daire çevresi[2] çizilse, daire çevresinden, bu iki çizgi arasında bulunan parçaya, bu açının yayı derler. Eğer bu yay, çeyrek daire büyüklüğünde ise, yani doksan derece olursa, bu açıya dik açı ve her çizgiye, diğerine nisbetle dikme derler. Eger bu yay doksandan fazla olursa, bu açıya geniş açı ve eğer doksandan az olursa, bu açıya dar açı derler.

Üç çizgi birbirlerine kavuştuklarında[3] oluşan şekle üçgen ve bu çizgilerden herbirine kenar ve açılardan herbirinin karşısında olan kenara ise o açının kirişi derler. Lakin kiriş, bu açıya nisbet olunmayıp yanlız başına zikrolunursa, en uzun kenar anlamına gelir.

[1] Dış tarafta oluşan köşe de bir açıdır.
[2] Çember.
[3] Bir alanı sınırlayacak şekilde.

Her üçgenin üç açısı, iki dik açı kadardır;[4] yani üç açının yayları toplansa yekûn yüz seksen derece olur.

Bir üçgende, iki dik açının, iki geniş açının veya bir dik açı ile bir geniş açının bulunması imkansızdır. Mümkün olan, bir dik açı ile iki dar açı veya bir geniş açı ile iki dar açıdır; ya da bir üçgenin bütün açıları dar açı olabilir. İlk guruptaki üçgenlere dik açılı üçgen, ikinci guruptaki üçgenlere geniş açılı üçgen ve üçüncü guruptaki üçgenlere ise açıları dar açı olan üçgen derler.

Her yayın kendine mahsus sinüsü ve tanjantı vardır ve bu değerler, sinüs ve tanjant cetvellerinden tam olarak, rub^c-ı müceyyebden[5] ise takriben öğrenilir.

Şimdi, her dik açının sinüsü altmış derecedir[6] ve her dar açının sinüsü altmış dereceden azdır. Ancak geniş açının sinüsü, onu yüz seksene tamlayan açının sinüsüdür. Zira altmıştan büyük sinüs olmaz. Mesela bir geniş açılı üçgenin, geniş açısı yüz otuz derece iken bir dar açısı otuz ve diğer dar açısı ise yirmi derece olursa, buradaki geniş açının sinüsü elli derecelik yayın sinüsü olur. Bunu öğrenmenin en kısa yolu şudur: İki dar açının yayları toplanıp, toplamın sinüsü alınırsa, geniş açının sinüsü bulunur.

Bir dairenin sekizde birinin, yani kırk beş derecelik bir yayın gölgesi[7] bir çubuk[8] miktarıdır ve gölgesi alınan yay, hangi daire çevresinden ise,

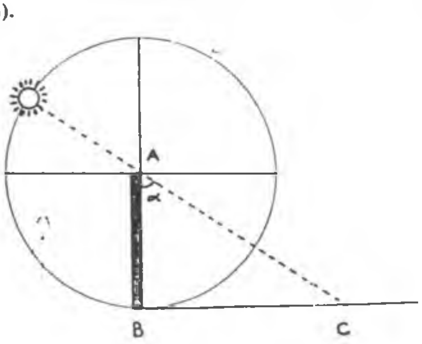
[4] Bir üçgenin iç açılarının toplamı, iki dik açının toplamına eşittir.

[5] Trigonometrik bağıntıların çözümünde kullanılan bu hesap aleti için bkz., Remzi Demir, "Eski Bir Hesap Aleti: Rubʿu'l-Müceyyeb ve Takiyüddîn İbn Mʿarûf'un 'Rubʿu'l-Müceyyeble Yapılan İşlemler Manzûmesi' Adlı Risâlesi", *Bilim ve Felsefe Metinleri*, Cilt 1, Sayı 1, Ankara 1992, s. 29-52.

[6] Gelenbevî, geleneğe uygun olarak altmışlık sistemi kullanmakta ve birim uzunluk olan yarıçapı 60 kabul ettiği gibi, kesirleri de altmışlık kesirlerle ifade etmektedir. Onun, 16'ıncı asrın meşhur astronom ve matematikçilerinden Takiyüddin'in ondalık kesirleri trigonometriye tatbik eden eserlerinden habersiz görünmesi oldukça ilginçtir.

[7] Tanjantı veya kontanjantı.

[8] Müslüman üçgenbilimcilerin birim uzunluk olarak aldıkları çubuk, birim dairenin yarıçapı (AB).



bu dairenin yarıçapı o gölgenin çubuğu olur. Eğer yarıçap altmış eşit kısma taksim olunursa, çubuk altmış ve gölge ise altmışlık olur; ve eğer on iki eşit kısma taksim olunursa çubuk on iki ve gölge ise parmaklık[9] olur; ve eğer yedi veya beş eşit kısma taksim olunursa, çubuk yedi veya beş ve gölge ise ayaklık[10] olur.

Gölge esasen iki kısımdır: Biri kotanjanttır.[11] Kotanjant, dairenin merkezinden yayın bitimine inen yarıçap üzerine amut olarak yayın bitiminden çıkıp yay tarafına giden doğru çizgidir. Diğeri ise tanjanttır.[12] Tanjant, dairenin merkezinden yayın başlangıcına inen yarıçapa amut olarak yayın başlangıcından çıkıp yay tarafına giden doğru çizgidir. Onun için birinci gölge[13] de derler.

İki şekilde merkezden çıkıp gölgenin bitimine ulaşan doğru çizgiye gölge çapı[14] denir.

Oranlanmış dörtlüde[15] kural şudur: Eğer bilinmeyen, taraflardan birisi olursa, bilinen ortalar birbirlerine çarpılıp, çarpım neticesi bilinen tarafa bölündüğünde, bölümden çıkan bilinmeyen taraf olur[16] ve eğer bilinmeyen, ortalardan birisi olursa, bilinen taraflar birbirine çarpılıp, çarpım neticesi, bilinen ortaya bölündüğünde, bölümden çıkan bilinmeyen orta olur.

Oranlanmış dörtlü, dört mertebede sıralanmış sayılardır. Dokuz kesir[17] ile diğer kesirlerden oluşan oranlanmış dörtlüde birinci ile ikinci arasın-

[9] Ẓıll-ı esâbʿi.

[10] Ẓıll-ı akdâm.

[11] Ẓıll-ı mabsût: uzamış gölge.

[12] Ẓıll-ı menkûs : baş aşağı çevrilmiş gölge.

[13] Ẓıll-ı evvel.

[14] Ḳıtr-ı zıll. Merkezden çıkıp tanjant uzunluğunun bitimine ulaşan doğru çizgiye sekant (ḳatr-ı evvel). uzunluğu, kotanjant uzunluğunun bitimine ulaşan doğru çizgiye ise kosekant (ḳatr-ı zıll-ı s̱ânî) uzunluğu denir.

[15] Erbʿaa-i mütenâsibe; orantı.

[16] Eskiden,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

orantısına oranlanmış dörtlü, a ve d niceliklerine taraflar (açlar) ve b ve c niceliklerine ise ortalar denilmekteydi. Biz, bügün, taraflar için 'dışlar', ortalar için 'içler' tabirlerini kullanmaktayız.

[17] Eskiden 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, ve 1/10 kesirlerine küsûr-ı tisʿa veya küsûr-ı müfrede (basit kesirler) denirken, diğer kesirlerden bunlara indirgenebilenlere küsûr-ı mürekkebe (bileşik kesirler), indirgenemeyenlere ise küsûr-ı şammâʾ (asal kesirler) denilmiştir. Daha ayrıntılı bilgi için bkz., Salih Zeki, *Asar-ı Bakıye,* cilt 2, İstanbul 1329, s. 149 vd.

daki oran, aynı şekilde üçüncü ile dördüncü arasında da olur ve hakikati aynı cinsten olan bir bütünün kendisi ile bir kısmı arasındaki oran ne ise, diğer cinsten diğer bir bütün ile, bir kısmı arasındaki oranın da öyle olduğu tahkik edildikten sonra, birinci bütün birinci ve bir kısmı ikinci, ikinci bütün üçüncü ve bir kısmı ise dördüncü kılanarak tertib edilir veya birinci bütünün bir kısmı birinci, kendisi ikinci ve ikinci bütünün bir kısmı üçüncü, kendisi ise dördüncü kılanarak tertib edilir. Özetle, oranlanmış dörtlü, iki cins arasına başka bir cins girmeyecek şekilde düzenlendikten sonra, dörtlüden herhangi üçü malum ve birisi meçhul olursa, meçhul olan sayı yukarıda geçen kural gereğince bulunur. Buna asıl orantı denir.

Örneğin, üç dirhem karanfil dokuz para iken, altı dirhem karanfilin kaç para edeceği bilinmek istenirse, üç dirhem karanfil birinci ve altı dirhem karanfil ikinci kılınıp, dokuz para üçüncü ve adedi bilinmeyen para ise dördüncü kılınır. Şimdi, bilinmeyen dördüncüde olduğundan tarafta bulunduğu için, bilinen iki orta olan altı adedin dokuz adede çarpımının sonucu olan elli dört aded, bilinen taraf olan üç adede bölündüğünde, altı dirhem karanfilin hissesi olan on sekiz para bölümün neticesi olur[18]. Üç dirhem karanfil altı dirhem karanfilin yarısı olduğu gibi, dokuz para da on sekiz paranın yarısı olur. Lakin bu vecihle, asıl oran birkaç oranı daha gerektirir. Zira örneğimizde, birinci ikincinin ve üçüncü dördüncünün yarısı olduğuna göre, ikinci birincinin ve dördüncü üçüncünün iki katı olmalıdır. Şimdi, önceki iki sayı ile sonraki iki sayıdan herbirini çevirip, ikinciyi birinci ve birinciyi ikinci, dördüncüyü üçüncü ve üçüncüyü ise dördüncü yapmak olanaklıdır. Şu halde önceki orantı, dördüncünün üçüncüye olan oranının, ikincinin birinciye olan oranına eşit olmasını da gerektirir.

Ondan sonra, asıl tertibi tamamen ters çevirip dördüncüyü birinci ve üçüncüyü ikinci, ikinciyi üçüncü ve birinciyi dördüncü yapmak da olanaklıdır ve bu iki surete orantının tersi derler.[19] Bunun gibi asıl orantı,

[18] $\frac{3}{6} = \frac{9}{x}$, $x = \frac{6:9}{3} = 18$

[19] Öyleyse, $\frac{3}{6} = \frac{9}{18}$ orantısının tersi,

a) $\frac{6}{3} = \frac{18}{9}$

b) $\frac{18}{9} = \frac{6}{3}$

orantılarıdır. Bu özellikleri karşılaştırınız, Abdurrahman Demirtaş, "Orantı", *Ansiklopedik Matematik Sözlüğü*, Ankara 1986, s. 213.

birincinin üçüncüye olan oranının, ikincinin dördüncüye olan oranına eşit olmasını da gerektirir. Nitekim örneğimizde, üç dokuzun ve altı on sekizin üçte biridir.[20]

Ayrıca üçüncüyü ikinci ikinciyi üçüncü yapmak da olanaklıdır ve buna bir orantının başka bir orantıya dönüştürülmesi denir.[21] Örneğimizde, dönüştürmeden sonra hasıl olan üçte birlik nisbet, asıl orantıdaki ikide birlik nisbete bedel kılınmıştır.

Şunun da bilinmesinde fayda vardır: Oranlanmış dörtlü ile bilinmeyen bulunurken, birinci bütünden herbir kısmın ikinci bütünden olan hissesinin, diğer bir kısmın hissesine eşit olması şarttır. Örneğimizde üç dirhem karanfilin dokuz paraya ve her dirheminin ise üçer paraya olması gibi. Ama bir dirhemi üç, diğer bir dirhemi beş ve üçüncü dirhem ise bir para olmak kaydıyla üç dirhemi dokuz paraya olsa, altı dirhem karanfilin mutlaka on sekiz paraya olması gerekmez. Bu nedenle sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant hesaplarına yay karışmaz.[22] Zira bir sinüsün yaydan olan hissesi diğer bir sinüsün hissesine eşit değildir ve bunun gibi tanjant miktarlarının da yay hisseleri birbirlerinden farklıdır. Lakin biraz yaklaşık bir netice verdiğinden, bu usulü, aralama yönteminde[23] kullandılar.

Şimdi bir ABC üçgeninde, AB kenarında dört ẕirâʿ,[24] BC kenarının üç ẕirâʿ ve yine birinci kenarın diğer küçük bir ẕirâʿ ile altmış ẕirâʿ olduğu malum, ancak ikinci kenarın bu küçük ẕirâʿ ile kaç ẕirâʿ olduğu meçhul olsa ve bu istense, büyük ẕirâʿdan herbir ẕirâʿnın küçük ẕirâʿdan on beşer ẕirâʿ hissesi olduğu için, bu örnekte oranlanmış dörtlü muntazam olup, dört büyük ẕirâʿnın üç büyük ẕirâʿya oranı, altmış küçük ẕirâʿnın meçhule oranına eşit olacaktır. Şimdi, meçhul, oranlanmış dörtlünün mertebelerinden dördüncü mertebede bulunduğundan, bilinen ortalar olan

[20] $\frac{3}{9} = \frac{6}{18}$

[21] Bu işlemle, $\frac{3}{6} = \frac{9}{18}$ orantısı,

$\frac{3}{9} = \frac{6}{18}$

orantısına dönüşecektir.

[22] Gelenbevî, oranti yoluyla açıların trigometrik değerlerinin tesbit edilemeyeceğine dikkat çekmekte ve bunun gerekçeesini bildirmektedir.

[23] İnterpolasyon işlemi; birbirine çok yakın iki değer arasındaki ara değerleri tesbit etmek için kullanılan orantı.

[24] Eskiden kullanılan bu ölçü birimi ve türleri hakkında bkz., Mehmet Erkal, "Arşın", *TDV İslam Ansiklopedisi*, cilt 3, İstanbul 1991, s. 411-413.

üç adedin altmış adede çarpımının neticesi olan yüz seksen adet, bilinen taraf olan dört adede bölündüğünde, küçük ẕirâ' ile BC kenarının kırkbeş ẕirâ' olduğu açığa çıkar.[25]

Bir Özellik: Oranlanmış dörtlüde, ortaların yüzeylendirilmesi,[26] tarafların yüzeylendirilmesine eşittir; yani ortaların birbirine çarpımının neticesi, tarafların birbirine çarpımının neticesine eşittir. Mesela, birinci örneğimizde ortalar olan altı aded ile dokuz adedin birbirine çarpımının neticesi elli dört olduğu gibi, taraflar olan üç adedin on sekiz adede çarpımının neticesi de yine elli dört adet olur.[27] Ve ikinci örnekte, ortalar olan üç adedin altmış adede çarpımının neticesi yüz seksen olduğu gibi, taraflar olan dört adedin kırkbeş adede çarpımının neticesi de yine yüz seksendir.[28] Her suret bu kıyasa uygun olmalıdır; eğer değilse, bu, oranlanmış dörtlü değildir.

BİRİNCİ FASIL

DİK AÇILI ÜÇGENE MAHSUS OLAN GELİN TEOREMİ BEYANINDADIR

Bunda hüküm şudur: Bir dik üçgende, dik açıyı teşkil eden iki kenarın karelerinin toplamı hipotenüsün karesine eşit olduğundan, bu dik üçgenin üç kenarından ikisi bilinirse, bilinmeyen diğer kenar bulunabilir.[29]

Bir sayının karesi, kendi kendisiyle çarıpımının neticesidir. Bu sayı, bu neticenin karekökküdür. Örneğin, üç sayısının karesi dokuzdur ve üç, dokuzun kareköküdür.

[25] $\frac{4}{3} = \frac{60}{x}$, $x = \frac{60.3}{4} = 45$

Bu vesile ile Gelenbevî'nin anlatımının sözel olduğuna ve simge kullanmadığına dikkat çekmek istiyoruz.

[26] a ve b gibi iki sayının çarpımı, kenarları a ve b uzunluğunda olan bir dörtgen yüzeyin teşkili demek olacağından, eskiden çarpma tabiri ile birlikte 'yüzeylendirme' manasına gelen 'musattah' tabiri de kullanılmaktaydı.

[27] $\frac{3}{6} = \frac{9}{18}$, $6.9 = 3.18 = 54$

[28] $\frac{4}{3} = \frac{60}{45}$, $3.60 = 4.45 = 180$

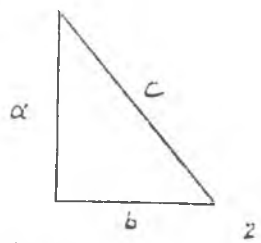
[29] Bugün bu teoremi Pisagor Teoremi diye isimlendiriyoruz.

Şimdi, eğer, bilinmeyen hipotenüs kenarı olursa, dik açıyı teşkil eden kenarların kareleri bulunup toplanır ve toplamın karekökü alınır. Elde edilen miktar hipotenüs olur.[30]

Eğer bilinmeyen, dik açıyı teşkil eden iki kenardan birisi ise, diğer kenarın karesi, hipotenüsün karesinden çıkarılıp, geriye kalanın karekökü alınır.[31] Elde edilen bilinmeyen kenarın miktarı olur.

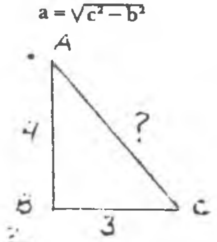
Mesela, yukarda verilen örnekte kullandığımız ABC dik açılı üçgeninde, AB kenarı dört ẓirâᶜ ve BC kenarı üç ẓirâᶜ idi. Ancak bu üçgenin hipotenüsü olan AC kenarının kaç ẓirâᶜ olduğu bilinmediğine göre, bunu bulmak için, birinci kenarın karesi olan on altı ile ikinci kenarın karesi olan dokuzu topladığımızda, iki kare toplamı yirmi beş eder; yirmi beşin karekökü alındığında, AC hipotenüsünün beş ẓirâᶜ olduğu görülür.[32]

Eğer AC kenarının beş ẓirâᶜ ve AB kenarının dört ẓirâᶜ olduğu biliniyor, ancak BC kenarının kaç ẓirâᶜ olduğu bilinmiyorsa, AB kenarının karesi olan on altı, hipotenüsün karesi olan yirmi beşten çıkarılıp geriye kalan dokuzun karekökü alındığında BC kenarının üç ẓirâᶜ olduğu görülür.[33]

[30]


$c^2 = a^2 + b^2$
$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

[31] $a^2 + b^2 = c^2$
$a^2 = c^2 - b^2$
$a = \sqrt{c^2 - b^2}$

[32]


$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$

$\overline{AC}^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25,\ \overline{AC} = \sqrt{25}\ ,\ \overline{AC} = 5$

[33] $\overline{BC} = ?$

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$

$16 + \overline{BC}^2 = 25$

$\overline{BC}^2 = 25 - 16 = 9$

$\overline{BC} = \sqrt{9} = 3$

Bunun gibi, dik açıyı teşkil eden iki kenardan AB kenarının kaç zirâʿ olduğu meçhul, diğer kenar ile hipotenüs malum olursa, diğer kenar olan BC kenarının karesi dokuz, hipotenüsün karesi olan yirmi beşten çıkarılıp, geriye kalan on altının karekökü alındığında AB kenarının dört zirâʿ olduğu görülür.[34]

İKİNCİ FASIL

DİK AÇILI ÜÇGENE MAHSUS OLAN TANJANT TEOREMİ BEYANINDADIR

Bir dik açıyı teşkil eden iki kenardan birinin diğerine oranı, yarıçapın[35] iki dar açıdan birisinin yayının tanjantına oranı gibidir[36] ve yine bu kenarlardan birinin hipotenüse oranı, yarıçapın veya tanjantın sekanta[37] oranı gibidir.[38]

[34] $\overline{AB} = ?$

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$

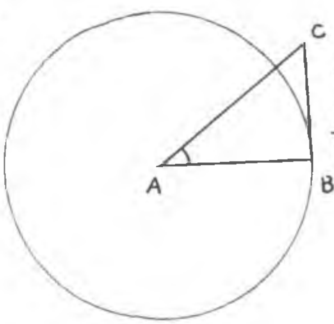
$\overline{AB}^2 + 9 = 25$

$\overline{AB}^2 = 25 - 9 = 16$

$\overline{AB} = \sqrt{16} = 4$

[35] Kâme, çubuk.

[36]



$\overline{AB} = 60$, $\overline{BC} = \text{tg } A$ ve $\overline{AC} = \sec A$ olduğuna göre,

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{60}{\text{tgA}}$ veya $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\text{tgA}}{60}$ olur.

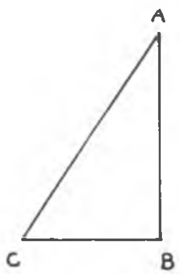
[37] Birinci gölge çapı.

[38] Burada da iki orantıdan bahsedilmektedir:

a) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{60}{\text{Sec A}}$

b) $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \dfrac{\text{tgA}}{\text{secA}}$

Şimdi, bir dik açılı üçgende üç malum bulunursa, oranlanmış dörtlü kuralıyla kenarlarını ve açıların gölgelerini[39] ve yaylarını ve gölge çaplarını[40] çıkarsamak mümkün olur.



Zira, mesela ABC üçgeninde A dar açısı merkez kabul edilip, yarıçapı AB kenarı kadar olan bir daire varsayılsa, bu dar açı yayının AB kenarı yarıçapı, BC kenarı tanjantı ve AC kenarı sekantı olur ve eğer C dar B açısı merkez kabul edilip yarıçapı CB kenarı kadar olan bir daire varsayılsa, C dar açısı yayının CB kenarı yarıçapı, BA kenarı tanjantı ve yine CA kenarı ise sekantı olur. Şayet gölge, altmışlık olursa, 'ķâme' denilen yarıçap miktarı altmış birim olur.

Şimdi, söz konusu üçgenin kenarlarının uzunluğu ile açılarının gölge ve gölge çaplarının niceliksel değerlerinden oluşan oranlanmış dörtlüde üç bilinen bulunursa, bilinmeyen bu kural ile çıkarsanır. Bunun türleri vardır:

Birinci Tür: Örneğin, söz konusu üçgenin AB kenarının dört ẓirâʿ ve BC kenarının üç ẓirâʿ olduğu malumken, A dar açısının tanjantı ve yayı meçhul olup, bilgisi istense, bu üçgenin AB kenarı yarıçap olduğundan ve gölge ẓirâʿ ile altmış birim uzunlukta olduğu bilindiğinden, oranlanmış dörtlü muntazam olur. Böylece, AB kenarının miktarı olan dört adedin BC kenarının miktarı olan üç adede oranı, yine AB kenarının miktarı olan altmış adedin BC tanjantına oranı gibidir. Bilinmeyen dördüncüde bulundu için, bilinen ortaların birbirine çarpımının neticesi olan yüz seksen aded, bilinen taraf olan dört adede bölündüğünde, A dar açısının kırk

[39] Tanjant ve kotanjantını.
[40] Sekant ve kosekantını.

beş derecelik[41] tanjantı olduğu görülür.[42] Bu değer yaylaştırılırsa,[43] söz konusu dar açı yayının 36 52, yani otuz altı derece ve elli iki dakika olduğu tesbit edilir.

İkinci Tür: Eğer altmış olan yarıçap ile AB kenarının dört ẓirâʿ ve AC kenarının ise yukarda geçtiği gibi, beş ẓirâʿ olduğu biliniyorken, A dar açısının yayının sekantının kaç derece olduğu bilinmiyorsa ve isteniyorsa, AB kenarının ẓirâʿ miktarı olan dört adedin AC kenarının ẓirâʿ miktarı olan beş adede oranı, yarıçapın sekanta oranı gibi olduğundan, meçhul olan sekant dördüncüde bulunduğu için, bilinen ortalar olan beş adedin altmış adede çarpımının neticesi olan üç yüz adet bilinen taraf olan dört adede bölündüğünde, söz konusu dar açının yetmiş beş adetlik sekantı olduğu görülür.[44]

Üçüncü Tür: Eğer BC kenarının üç ẓirâʿ AC kenarının beş ẓirâʿ ve A dar açısının tanjantının kırk beş derece olduğu malum ve sekant meçhul ise ve isteniyorsa, üç ẓirâʿnın beş ẓirâʿya oranı, tanjantın sekanta oranı gibi olduğundan ve bilinmeyen yine dördüncüde bulunduğundan, bilinen ortalar olan beş adedin kırk beş adede çarpımının neticesi olan iki yüz yirmi beş adet, bilinen taraf olan üç adede bölündüğünde, sekant uzunlu-

[41] Yay derecesi değildir. 60 birimlik yarıçapın 45 birimlik kısmıdır.

[42]
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{60}{tgA}$$
$$\frac{4}{3} = \frac{60}{tgA}$$
$$tgA = \frac{60.3}{4} = 45$$

[43] Eskiden bir A açısının yayının sinüsünü veya tanjantını almak (sinüsleştirme işlemi veya tanjanlaştırma işlemi) ve sinüsü veya tanjantı bilinen bir A açısının yayını bulmak (yaylaştırma işlemi) için, önçeden hazırlanmış sinüs ve tanjant cetvelleri (tabloları) kullanılmakta ve söz konusu işlemler bu tablolardan istifade edilerek yapılmaktaydı. Bu cetvellerin hazırlanması ve kullanılması hususunda bkz., Salih Zeki, *Âşâr-ı Bâḳıye,* Cilt 1, İstanbul 1329, s. 85 vd. Öyleyse burada yapılan işlemi şu şekilde simgeleştirebiliriz:

$$\text{arc tg } 45 = 36° \ 52'$$

[44]
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{60}{secA}$$
$$\frac{4}{5} = \frac{60}{secA}$$
$$secA = \frac{60.5}{4} = 75$$

ğu yine yetmiş beş derece olarak elde edilir;[45] ve bu iki yolla sekantın çıkarsanması, AC kenarının zirâʿ miktarının bilinmesine bağlıdır. Bu değere bağlı olmaksızın çıkarsanması ise üç yol ile mümkündür. Ancak söz konusu yollar tanjant teoremine ait hükümlerden olmadığı için bu mahalde terk edilip ilerde anlatılmıştır.

Dördüncü Tür: Eğer yarıçap ile tanjant ve AB kenarının dört zirâʿ olduğu malum ve BC kenarının kaç zirâʿ olduğu meçhul ise ve isteniyorsa, daha önce geçtiği üzere, dört zirâʿnın meçhule oranı, yarıçapın tanjanta oranı gibi olduğundan, bilinmeyen ikincide olacak ve bilinen taraflar olan dört adedin kırk beş adede çarpımının neticesi olan yüz seksen adet, bilinen orta olan altmış adede bölündüğünde, BC kenarının üç zirâʿ olduğu görülecektir.[46]

Beşinci Tür: Eğer yarıçap ile tanjant ve BC kenarının üç zirâʿ olduğu malum ve AB kenarının kaç zirâʿ olduğu meçhul ise ve isteniyorsa, önceki tertib üzere, meçhulün üç zirâʿya oranı, yarıçapın tanjanta oranı gibi olduğundan, bilinmeyen birincide olacak ve bilinen ortalar olan üç adedin altmış adede çarpımının neticesi olan yüz seksen adet, bilinen taraf olan kırk beş adede bölündüğünde, AB kenarının dört zirâʿ olduğu görülecektir.[47]

Altıncı Tür: Eğer yarıçap ile sekant ve AB kenarının dört zirâʿ olduğu malum ve AC hipotenüsünün kaç zirâʿ olduğu meçhul ise, kural gereğince, dört zirâʿnın meçhule oranı, yarıçapın sekanta oranı gibi olduğundan,

45 $$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{tgA}{secA}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{45}{secA}$$

$$secA = \frac{5.45}{3} = 75$$

46 $$\frac{4}{\overline{BC}} = \frac{60}{45}$$

$$\overline{BC} = \frac{4.45}{60} = 3$$

47 $$\frac{\overline{AB}}{3} = \frac{60}{45}$$

$$\overline{AB} = \frac{3.60}{45} = 4$$

meçhul ikincide bulunacak ve bilinen taraflar olan dört adedin yetmiş beş adede çarpımının neticesi olan üç yüz adet, bilinen orta olan altmış adede bölündüğünde, AC hipotenüsünün beş zirâʿ olduğu görülecektir.[48]

Yedinci Tür: Tanjant ile sekant ve BC kenarının üç zirâʿ olduğu malum ve AC hipotenüsünün kaç zirâʿ olduğu meçhul ise, kural gereğince, üç zirâʿnın meçhule oranı, tanjantın sekanta oranı gibi olduğundan meçhul yine ikincide bulunacak ve bilinen taraflar olan üç adedin yetmiş beş adede çarpımının neticesi olan iki yüz yirmi beş adet, bilinen orta olan kırk beş adede bölündüğünde, AC hipotenüsünün yine beş zirâʿ olduğu görülecektir.[49]

Şimdiye değin kaleme alınan yedi tür, söz konusu üçgenin A dar açısının daire merkezi sayılmasına dayalıdır ve eğer C dar açısı, daire merkezi farz olunursa, bu dar açının tanjantı, yayı ve sekantı ve söz konusu üçgenin bilinmeyen kenarları daha önce söylenen üç malumat ile yedi tür halinde gösterilen yolların benzerleriyle çıkarsanır.

Uyarı: Yukardaki ve aşağıdaki işlemlerde bir adet, diğer bir adede çarpılıp, çarpım neticesinin altmış adede bölünmesi gerektiği yerlerde, gökbilimde kullanılan hesap harfleriyle[50] işlem yapılırsa, sadece çarpma ile iktila edilir ve neticenin altmışa bölünmesi gerekmez. Gökbilimciler bu çarpmaya 'münḫaṭṭ'[51] derler.

[48] $$\frac{4}{\overline{AC}} = \frac{60}{75}$$

$$\overline{AC} = \frac{4.75}{60} = 5$$

[49] $$\frac{3}{\overline{AC}} = \frac{45}{75}$$

$$\overline{AC} = \frac{3.75}{45} = 5$$

[50] Ebced rakamları.

[51] Azaltılmış, kısaltılmış.

ÜÇÜNCÜ FASIL

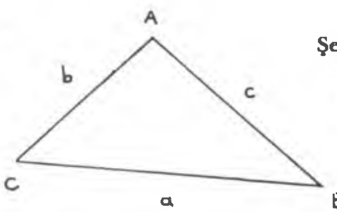
HER ÜÇGENDE GEÇERLİ OLAN DOYURAN TEOREM BEYANINDADIR

Bu şöyledir: Herhangi bir üçgenin bir kenarının diğerine oranı, birinci kenarı gören açının sinüsünün ikinci kenarı gören açının sinüsüne oranı gibidir.[52]

Zira, Birinci Fasıl'da misalimiz olan ABC dik açılı üçgeninde, yarıçapı AC kenarı kadar olan bir dairenin merkezinin A dar açısı olduğu varsayılırsa, bu üçgenin BC kenarı, söz konusu dar açının sinüsü olur; ve eğer söz konusu dairenin merkezinin C dar açısı olduğu varsayılırsa, bu üçgenin AB kenarı, bu ikinci dar açının sinüsü olur.[53]

Böylece, her dik açılı üçgende kenarlar oranının sinüsler oranına eşit olduğu anlaşılır. Dik açılı olmayan üçgenlerde de hükmün böyle olduğu mahallinde isbat edilmiştir.

Bu teorem ile bilinmeyenin çıkarsanması, yine oranlanmış dörtlü kuralına dayandığından, elbette, kenar ile açıların sinüslerinden ibaret olan mertebelerin üçünün bilinmesi gereklidir. Bu nedenle, üçgenin iki kena-

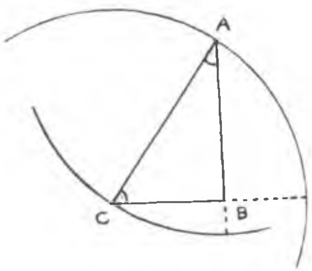
[52]


Şekildeki ABC üçgeninde,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

Bugün 'Sinüs Teoremi' olarak adlandırdığımız bu teoremin en genel ifadesi, bilindiği gibi, şöyledir:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

[53]


ABC dik üçgeninde,

$\sin C = \overline{AB}$

$\sin A = \overline{BC}$
olduğundan,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

olur.

rı ile bir açısı yahut iki açısı ile bir kenarı bilinmedikçe bütün kenarlarını ve açılarını bilmek mümkün değildir.

Şimdi, kenar ve sinüslerden müteşekkil oranlanmış dörtlüden üç nicelik bilinirse, bilinmeyen, oranlanmış dörtlü kuralıyla çıkarsanır.

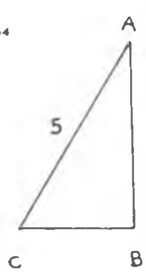
Bu teoreme ait hükümler üç kısımda toplanır. Zira, bilinen üç unsur, ya iki açı bir kenar, ya iki kenar ve bu kenarlardan birisini gören bir açı veyahut iki kenar ve aralarındaki açı olur.

Birinci Kısım: İki açı ile bir kenarın bilinmesidir. Burada hüküm şudur: Bilinen kenarın bilinmeyen kenara oranı, birinci kenarı gören açının sinüsünün ikinci kenarı gören açının sinüsüne oranı gibidir.

Mesela, örneğimiz olan ABC üçgeninde A ve B açıları ile AC kenarının beş ẓirâʿ olduğu malum, ancak BC kenarının kaç ẓirâʿ olduğu meçhul olsa, söz konusu üçgen dik açılı olduğundan B dik açısının yayının doksan derece ve sinüsünün ise altmış derece olduğu ve A dar açısının dahi, yukarda tesbit edildiği üzere, yayının otuz altı derece elli iki dakika ve sinüs cetveline müracaat olunduğunda söz konusu yayın sinüsünün ise otuz altı derece olduğu bilindiğinden, yukarda geçen oran gereğince, AC kenarının miktarı olan beş ẓirâʿnın BC kenarının bilinmeyen ẓirâʿına oranı, birinci kenarı gören dik açının sinüsü olan altmış adedin bilinmeyen kenarı gören dar açının sinüsü olan otuz altı adede oranı gibi olup, bilinmeyen ikincide bulunduğu için, bilinen taraflar olan beş adedin otuz altı adede çarpımının neticesi olan yüz seksen adet, bilinen orta olan altmış adede bölündüğünde BC kenarının üç ẓirâʿ olduğu görülür.[54]

Eğer söz konusu iki açı ile birlikte bilinen BC kenarı olup AC kenarı meçhul ise, o zaman, yukarıda geçen tertipte meçhul birincide olacağı için, bilinen ortalar olan üç ẓirâʿnın altmış adede çarpımının neticesi olan yüz

54



$\sin A = \sin 36° \; 52' = 36$
$\sin B = \sin 90° = 60$
$AC = 5 \quad BC = ?$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\sin B}{\sin A}$$

$$\frac{5}{\overline{BC}} = \frac{60}{36}$$

$$\overline{BC} = \frac{5.36}{60} = 3$$

seksen adet, bilinen taraf olan otuz altı adede bölündüğünde AC kenarının beş zirâ` olduğu öğrenilir.[55]

Ancak söz konusu iki açı ile birlikte bilinen kenar AC kenarı veya BC kenarı olup, bilinmeyen kenar ise AB kenarı olursa, bilinmeyen kenar bilinen iki açıdan herhangi birisinin kirişi olmadığından[56] oranlanmış dörtlü kuralıyla söz konusu meçhul kenarın zirâ`ını çıkarsamak için, onu gören C dar açısının yayının ve sinüsünün tesbit edilmesi gerekir ve bu ise kolaydır. Zira bir üçgende iki açı bilinirse, bilinen bu iki açının yayları toplanıp, toplam yüz seksenden çıkarıldığında, üçüncü açının yayı bulunur; ve bir dik açılı üçgende, bilinen iki açı, dik açı ile iki dar açıdan birisi olursa, sadece, bu bilinen dar açıyı doksandan çıkarmak yeterlidir; artan, diğer dar açının yayı olur.

Şimdi, A dar açısının yayı olan otuz altı derece elli iki dakika doksandan çıkarıldığında, C dar açısının elli üç derece sekiz dakikalık bir yayı olduğu görülür.[57] Sinüs cetveline müracaat olunursa, söz konusu yayın sinüsünün kırk sekiz derece olduğu öğrenilir.

Şimdi, bilinen açıların dik açı ile C dar açısı ve bilinen kenarın AC kenarı olduğu varsayılırsa, beş zirâ`nın bilinmeyene oranı, altmış adedin kırk sekiz adede oranı gibi olur. Bilinmeyen ikincide bulunduğundan bilinen taraflar olan beş zirâ`nın kırk sekiz adede çarpımının neticesi olan iki yüz kırk adet, bilinen orta olan altmış adede bölündüğünde AB kenarının dört zirâ` olduğu görülür.[58]

[55]
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\sin B}{\sin A}$$
$$\frac{\overline{AC}}{3} = \frac{60}{36}$$
$$\overline{AC} = \frac{3.60}{36} = 5$$

[56] Bu iki açıdan herhangi birisini görmediğinden.

[57]
$$\begin{array}{rr} 89^\circ & 60' \\ -\ 36^\circ & 52' \\ \hline 53^\circ & 08' \end{array}$$

[58]
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\sin B}{\sin C}$$
$$\frac{5}{\overline{AB}} = \frac{60}{48}$$
$$\overline{AB} = \frac{5.48}{60} = 4$$

Eğer bilinen iki açının, iki dar açı olduğu ve bilinen kenarın ise BC kenarı olduğu varsayılırsa, üç ẕirâ'nın bilinmeyene oranı, otuz altı adedin kırk sekiz adede oranı gibi olur. Bilinmeyen yine ikincide bulunduğundan, bilinen taraflar olan üç ẕirâ'nın kırk sekiz adede çarpımının neticesi olan yüz kırk dört adet, bilinen orta olan otuz altı adede bölündüğünde, AB kenarının dört ẕirâ' olduğu görülür.[59]

İkinci Kısım: Üç bilgi, iki kenar ile bu kenarlardan birisini gören açının bilgisidir. Burada hüküm şudur: Bilinen kenarın, diğer bilinen kenara oranı, birinci kenarı gören açının sinüsünün, ikinci kenarı gören açının sinüsüne oranı gibidir. Bu da iki dala ayrılır. Zira istenilen meçhul ya bilinmeyen açı veya bilinmeyen diğer kenardır.

Birinci Dal: İki kenar ve bunlardan birisini gören açı biliniyorken geriye kalan iki açıdan birisinin veya ikisinin meçhul olması ve aranmasıdır.

Şimdi, diğer kenarı gören bilinmeyen açı bulunduktan sonra bunun yayı, bilinen açının yayı ile toplanıp, toplam yüz seksenden çıkarıldığında bütün açılar bilinir.

Mesela, örneğimiz olan ABC üçgeninde AC kenarının beş ẕirâ' ve AB kenarının dört ẕirâ' olduğu ve B açısının bir dik açı olduğu bilindiği halde, AB kenarını gören C dar açısının yayı ve sinüsü bilinmese, yukarda geçen orantı gereğince, beş ẕirâ'nın dört ẕirâ'ya oranı, dik açının sinüsü olan altmış adedin bilinmeyen dar açının sinüsüne oranı gibi olup, işbu tertibde bilinmeyen dördüncü de bulunduğu için, bilinen ortalar olan dört adedin altmış adede çarpımının neticesi olan iki yüz kırk adet, bilinen taraf olan beş adede bölündüğünde, bilinmeyen C dar açısının sinüsünün kırk sekiz derece olduğu ve yaylaştırma işleminden sonra yayının ise elli üç derece ve sekiz dakika olduğu görülür.[60]

[59] $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\sin A}{\sin C}$

$\frac{3}{\overline{AB}} = \frac{36}{48}$

$\overline{AB} = \frac{3.48}{36} = 4$

[60] $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\sin B}{\sin C}$

$\frac{5}{4} = \frac{60}{\sin C}$

$\sin C = \frac{4.60}{5} = 48$

$\overset{<}{C} = 53° \quad 08'$

Ve örneğimizdeki üçgen, dik açılı olduğundan söz konusu yay, sadece doksandan çıkarıldığında A dar açısının yayının ise otuz altı derece elli iki dakika olduğu görülür.

Eğer AC ve AB kenarlarıyla C açısı bilindiği halde B açısı meçhul olursa, yukarıda geçen tertib ve orantı gereğince, beş adedin dört adede oranı bilinmeyen açının sinüsünün bilinen açının sinüsüne oranı gibi olduğundan, meçhul üçüncü de bulunacak ve bilinen taraflar olan beş adedin kırk sekiz adede çarpımının neticesi olan iki yüz kırk adet, bilinen orta olan dört adede bölündüğünde B açısının sinüsünün altmış ve yayının ise doksan derece olduğu görülür.[61]

İki kenar ve bunlardan birisini gören açının bilindiği diğer durumlarda hüküm bu kıyas üzeredir.

İkinci Dal: İki kenar ve bunlardan birisini gören açı biliniyorken üçüncü kenarın meçhul olması ve aranmasıdır.

Hiç şüphesiz, bilinen kenarları gören açılardan biri biliniyor ve diğeri bilinmiyorsa, bilinmeyen açının yayını Birinci Dal'da yazılan yolla elde edip, bilinen açının yayına ekledikten sonra, toplam yüz seksenden çıkarılır ve bilinmeyen kenarı gören açının yayı ve sinüs cetvelinden sinüsü alınır. Ondan sonra Birinci Kısım'da anlatılan şekilde bilinmeyen kenar bulunur.

Mesela, örneğimizde yine AC ve AB kenarları ile B açısı malum olup BC kenarı meçhul olsa ve istense, bilinmeyen bu kenarın miktarı doyuran teorem yoluyla bulunabilir. Bilinmeyen bu kenarı gören A dar açısının yayının da bilinmesi gerekli olduğu zaman, bu dar açının kendisi gibi kirişinin dahi meçhul olması nedeniyle, Birinci Dal'daki yolla bu dar açının sinüsünün ve yayının belirlenmesi mümkün olmadığından, söz konusu bilinen kenarlardan AB kenarını gören C dar açısının sinüsünün kırk sekiz derece ve yayının ise elli üç derece sekiz dakika olduğu Birinci Dal kuralıyla belirlenip, ondan sonra söz konusu yay doksandan çıkarılırsa, A dar açısının yayının otuz altı derece elli iki dakika ve sinüleştirme

[61] $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\sin B}{\sin C}$

$\frac{5}{4} = \frac{\sin B}{4B}$

$\sin B = \frac{5.48}{4} = 60$

$\hat{B} = 90°$

işleminden[62] sonra sinüsünün ise tam otuz altı derece olduğu çıkarsanır ve BC kenarının üç ẕirâʿ olduğu Birinci Kısım'da yazılan kural ile öğrenilir. Diğeri bununla kıyaslanarak bulunabilir.

Üçüncü Kısım: Sadece iki kenar ve aralarındaki açının bilinmesidir. Bu kısımda bilinen kenarlardan herhangi biri bilinen açının kirişi olmadığından, söz konusu açının sinüsünün oranlanmış dörtlüden birisi olması mümkün olamıyacağı için oranlanmış dörtlüye ait üç bilgi muntazam olmaz ve doyuran teorem hükmüyle, bilinmeyen kenar ve açılardan herhangi biri bulunamaz. Öyleyse, burada başka bir yol takip etmek gerekir. bu yol ise iki çeşittir.

Birinci çeşitte, istenen üçgen yukarıdaki örneğimizde geçtiği gibi bir dik açılı üçgendir. Burada, ancak iki kenar ile aralarındaki açının bilinip, bunların dışındaki açı ve kenarlardan herhangi birinini bilinmemesi, bu bilinen açının dik açı olmasını ve bilinen kenarların ise dik açıyı teşkil eden kenarlar olmasını gerektirir. Zira bu bilinen açı iki dar açıdan birisi olsa, dik açı zaten malum olduğundan, iki kenar ile iki açı ve daha doğrusu bütün açılar bilineceğinden önceki iki kısımdan birine geri dönmek lazım gelecektir. Oysa, şimdi kelam üçüncü kısımdadır.

Bilinen sadece dik açı ile bunu teşkil eden iki kenar olduğunda, eğer istenilen meçhul, dik açının kirişi olan üçüncü kenar ise, gelin teoremi hükmüyle, dik açıyı oluşturan iki kenardan herbirinin kareleri alındıktan, yani kendi kendileriyle çarpıldıktan sonra, çarpım neticesi olan kareleri toplanır ve toplamın karekökü alınır. Bulunan kök dik açının kirişi olur.

Mesela, örneğimizde AB kenarı dört ẕirâʿ olduğuna göre, karesi on altı ve BC kenarı üç ẕirâʿ olduğuna göre, karesi dokuz olur. Dokuz adet ile on altı adet toplandığında yirmi beş adet eder. Bu sayının karekökü alındığında, AC kenarının beş ẕirâʿ olduğu görülür, ve bundan sonra, bilinen açının kirişi de bilindiğinden, iki kenar ve bunlardan birisini gören dik açı malum olacak ve İkinci Kısım hükmüyle iki dar açıdan birisi dahi bulunacaktır. Nitekim, bu, örneğimizde ayrıntılarıyla anlatıldı.

Ve eğer istenilen meçhul, dar açılardan birisi olursa, önce tanjant teoremi hükmüyle, muayyen bir dar açının tanjantı bulunur ve bu, tanjant cetvelinden yaylaştırılarak söz konusu dar açının yayı çıkarsanır.

Nitekim, yukarda geçen örneğimizde, AB kenarı dört ẕirâʿ ve BC kenarı üç ẕirâʿ olduğu için, A dar açısının tanjantının kırk beş, yayının otuz

[62] Sinüsleştirme, işlem veya sinüs cetveli yardımıyla bir açının sinüsünün tesbit edilmesidir.

altı derece elli iki dakika ve sinüsünün ise otuz altı derece ve yine C dar açısının tanjantının seksen derece, yayının elli üç derece sekiz dakika ve sinüsünün ise kırk sekiz derece olduğunun tanjant teoremi ile elde edilmesi yöntemleri, tafsilatıyla daha önce beyan olunmuştur; ve bu şekilde açılar bilindikten sonra, üçgenin kenarlarından dik açının kirişi olan hipotenüs meçhul olursa, doyuran teorem aksamından ikinci kısım hükmüyle çıkarsanır veyahut yine tanjant teoremi hükmüyle, önce sekant bulunup, ondan sonra, yarıçapın veya tanjantın sekanta oranı, bilinen kenarın bilinmeyen hipotenüse oranı gibi olacağından meçhul hipotenüs bulunur. Nitekim söz konusu örneğimizde hepsi ayrıntılarıyla anlatıldı.

İkinci çeşitte, istenen üçgen, dik açılı olmayan bir üçgen, yani açıları dar açı olan bir üçgen ya da geniş açılı bir üçgendir.

Burada hüküm şudur: Bilinmeyen iki açının birinden, bu bilinmeyen açının kirişi üzerine bir dikme inilir. İki açısı ve bir kenarı bilinen bir dik açılı üçgen teşkil edilip, ondan sonra doyuran teoremden birinci kısım hükmüyle, elde edilen bu üçgenin dik açısını oluşturan iki kenarı bulunur ve daha sonra bilinen açı ile dikme ayağı arasında yer alan kenarın, üzerine dikme inilen kenardan farkı alınıp, gelin teoremi hükmüne göre, söz konusu fazlalıkla dikmenin kareleri toplanır ve toplamın karekökü alınırsa, birinci üçgenin kenarlarından bilinen açının kirişi bulunur; veyahut tanjant teoreminin yardımıyla, dikme veya fazlalıktan biri altmış adede çarpılıp, çarpım neticesi diğer kenara bölündüğünde, dikme ya da fazlalıktan bölünenin[63] gördüğü meçhul açının tanjantı elde edilir; ondan sonra tanjant cetvelinden yaylaştırılıp, söz konusu açının yayı ve sinüsü bulunur ve daha sonra birinci üçgende bilinen açının kirişi olan kenar, doyuran teorem ya da tanjant teoremi hükümlerinden biriyle bulunur ve bu makamda dahi kelam iki sınıftır.

Birinci Sınıf: Gerek açıları dar açı olan bir üçgenin ve gerekse geniş açılı bir üçgenin, bilinen iki kenarı arasında bulunan bilinen açısı, eğer dar açı olursa,[64] bilinen kenarlardan en kısa olan kenar ile bilinmeyen üçüncü kenarın bitiştiği bilinmeyen açıdan, bilinen kenarlardan en uzun kenar üzerine bir dikme inilip, dik açılı olmayan üçgen iki tane dik açılı üçgene taksim olunarak, bilinmeyen üçüncü kenarla geriye kalan açıların bulunmasına girişilir.

[63] Matbu nüshada 'maḳsûm ʿaleyh' yazılmış olmasına rağmen, doğrusu 'maḳsûm'dur.

[64] Açıları dar açı olan üçgenin, tanım gereği, bütün açıları dar açı olacağından, bu kayıt, bu tip üçgenler için değil geniş açılı üçgenler için konulmuştur.

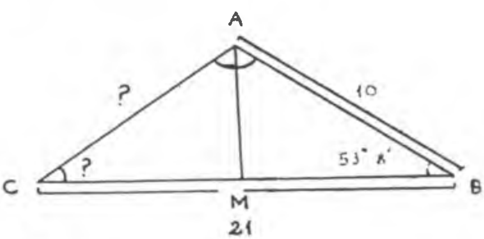
Mesela, bir ABC geniş açılı üçgeninde, AB kenarının on ẓirâʿ, BC kenarının yirmi bir ẓirâʿ ve B açısının yayının 53 8, yani elli üç derece sekiz dakika[65] ve sinüsünün ise kırk sekiz derece olduğu malum olup, AC kenarının ẓirâʿı ile A ve C açıları meçhul olsa, şimdi, bilinen kenarlardan en kısa kenar olan AB kenarının bilinmeyen kenara bitiştiği A açısından BC kenarı üzerine AM amudu inildiğinde, bu geniş açılı üçgen, BMA ve CMA üçgenleri gibi iki dik açılı üçgene bölünür ve bilinmeyen kenar, ikinci üçgende M dik açısının kirişi olur.[66]

Şimdi, BMA dik açılı üçgeninde, B ve M açıları ile BA kenarının on ẓirâʿ olduğu bilindiğine göre, iki açısı ve bir kenarı bilinmiş olduğundan, önce, birinci kısım hükmüyle bu dik açılı üçgenin bütün kenarları ve açıları elde edilip, ondan sonra ikinci dik açılı üçgenin bütün kenarları ve açıları gelin teoremi veya tanjant teoremi hükmüyle bulunur.

Bunun yolu şöyledir. BMA dik açılı üçgeninde, BA kenarının miktarı olan on ẓirâʿnın, inilen dikmenin bilinmeyen ẓirâʿına oranı, dik açının sinüsü olan altmış adedin B dar açısının sinüsü olan kırk sekiz adede oranı gibi olduğundan, bilinmeyen ikinci de bulunacak ve bilinen taraflar olan on adedin kırk sekiz adede çarpımının neticesi olan dört yüz seksen adet, bilinen orta olan altmış adede bölündüğünde AM amudunun sekiz ẓirâʿ olduğu görülecektir.[67]

[65] Gelenbevî, yayların (veya trigonometrik fonksiyonlarının) derece ve dakikalarını göstermek için de herhangi bir simge kullanmamış sözel olarak ifade etmiştir.

[66]



[67]
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\sin M}{\sin B}$$
$$\frac{10}{\overline{AM}} = \frac{60}{48}$$
$$\overline{AM} = \frac{10.48}{60} = 8$$

Bu üçgenin A dar açısının yayı 36 52, yani otuz altı derece elli iki dakika[68] ve sinüsü ise, kesirsiz otuz altı derece olduğuna göre, şimdi, yine on zirâ'nın BM kenarının bilinmeyen zirâ'ına oranı, altmış adedin otuz altı adede oranı gibi olacağından, bilinmeyen yine ikincide bulunacak ve bilinen taraflar olan on adedin otuz altı adede çarpımının neticesi olan üç yüz altmış aded, bilinen orta olan altmış adede bölündüğünde BM kenarının altı zirâ' olduğu görülecektir.[69] Eğer dilersen, bu kenarın miktarını, yukarda beyan olunduğu gibi, gelin teoremi hükmüyle veya tanjant teoremi hükmüyle bulabilirsin. Zira bu dik açılı üçgenin bütün açıları ve tanjantları bilinmektedir.

BM kenarının miktarı olan altı zirâ', geniş açılı üçgenin BC kenarının miktarı olan yirmi bir zirâ'dan çıkarıldığında, CMA dik açılı üçgeninin kenarlarından MC kenarının on beş zirâ' olduğu açığa çıkar.

Şimdi, miktarı sekiz zirâ' olarak bulunan dikme, iki dik açılı üçgen arasında müşterek kenar olduğundan, bu CMA dik açılı üçgeninin dahi iki kenarı ile aralarındaki dik açı bilinmiş olacaktır. Gelin teoremi hükmüne göre —bilinen kenarlar, dik açıyı teşkil eden iki kenar olduğundan— on beş zirâ'nın karesi olan iki yüz yirmi beş adetle sekiz zirâ'nın karesi olan altmış dört adet toplanıp, iki kare toplamı olan iki yüz seksen dokuz adedin karekökü alındığında, bu dik açılı üçgende dik açının kirişi ve geniş açılı üçgenin bilinmeyen kenarı olan AC kenarının on yedi zirâ' olduğu malum olur[70] veyahut tanjant teoremi hükmüyle, MC kenarının miktarı olan on beş zirâ'nın dikmenin miktarı olan sekiz zirâ'ya oranı, yarıçapın,

[68] $180° - (90° + 53°\ 08') = 36°\ 52'$

[69]
$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{\sin M}{\sin A}$$
$$\frac{10}{\overline{BM}} = \frac{60}{36}$$
$$\overline{BM} = \frac{10.36}{60} = 6$$

[70]
$$\overline{AC}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{AM}^2$$
$$= 15^2 + 8^2$$
$$= 225 + 64$$
$$\overline{AC}^2 = 289$$
$$\overline{AC} = \sqrt{289}$$
$$= 17$$

C dar açısının bilinmeyen tanjantına oranı gibi olduğundan, meçhul dördüncü de olacak ve bilinen ortalar olan sekiz adedin altmış adede çarpımının neticesi olan dört yüz seksen adet, bilinen taraf olan on beş adede bölündüğünde, bu dik açılı üçgen ile geniş açılı üçgenin müşterek açısı olan C dar açısının tanjantının otuz iki derece ve yayının ise, tanjant cetvelinden yaylaştırıldıktan sonra, 28, 4, 22, yani yirmi sekiz derece dört dakika ve yirmi iki saniye olduğu görülecektir.[71]

Eğer dilersen, sekiz adedin on beş adede oranı, yarıçapın, CMA dik açılı üçgeninde A dar açısının bilinmeyen tanjantına oranı gibi olacağı için, meçhul dördüncü de bulunacak ve bilinen ortalar olan on beş adedin altmış adede çarpımının neticesi olan dokuz yüz adet, bilinen taraf olan sekiz adede bölündüğünde, bu dik açılı üçgenin A dar açısının tanjantının 112 30, yani yüz on iki derece otuz dakika ve yayının ise, yaylaştırma işleminden sonra, 61 55 38, yani altmış bir derece elli beş dakika ve otuz sekiz saniye olduğu bulunacaktır;[72] ve bu dar açının yayı olan söz konusu miktar, BMA dik açılı üçgeninden A dar açısının yayı o lan 36 52 ile toplandığında, geniş açının yayının 98 47 38, yani doksan sekiz derece kırk yedi dakika ve otuz sekiz saniye olduğu görülür. Bu miktar, B ve C dar açılarının yaylarıyla toplanırsa, cümlesi tam iki dik açı miktarı olur.

AC bilinmeyen kenarının ẕirâʿı ise, birinci kısım hükmüyle, ya dik açılı üçgende dik açının kirişi olması itibariyle veyahut geniş açılı üçgende B dar açısının kirişi olması itibariyle bulunur. Mesela, birinci itibara göre,

[71] $$\frac{\overline{MC}}{\overline{AM}} = \frac{60}{tgC}$$

$$\frac{15}{8} = \frac{60}{tgC}$$

$$tgC = \frac{8.60}{15} = 32$$

$$\overline{C} = 28^\circ\ 4'\ 22''$$

[72] $$\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{60}{tgA}$$

$$\frac{8}{15} = \frac{60}{tgA}$$

$$tgA = \frac{15.60}{8} = 112\ 30$$

$$\overset{<}{A} = 61^\circ\ \ 51'\ \ 38''$$

MC kenarının miktarı olan on beş ẕirâᶜnın AC kenarının bilinmeyen ẕirâᶜına oranı, A dar açısının sinüsü olan 52 56 28, yani elli iki derece elli altı dakika ve yirmi sekiz saniyenin, M dik açısının sinüsü olan altmış adede oranı gibi olduğundan, bilinmeyen ikincide bulunacak ve bilinen taraflar olan on beş adedin altmış adede çarpımının neticesi olan dokuz yüz adet, bilinen orta olan ve yukarda söylenmiş bulunan sinüse bölündüğünde, AC kenarının on yedi zira olduğu görülecektir.[73]

Ancak, bölen durumunda bulunan sinüste dakikalar ve saniyeler olduğu için, çarpma ve bölme hurûfât hesabıyla[74] daha kolaydır ve eğer Hint rakamlarıyla[75] hesap yapmak istenirse, önce bölünen ve bölen terimlerden herbiri en küçük kesir mertebesine —burada saniye— dönüştürülür, yani her ikisi de saniyeye çevrilir. Bunun yolu şöyledir: Evvela on beş tam sayısının altmış tam sayısına çarpımının sonucu olan dokuz yüz tam sayısını derece itibar edip, ondan sonra bunu, altmışla çarparak dakikaya ve bu çarpımının neticesini ise bir defa daha altmışla çarparak saniyeye dönüştürürüz. Böylece bölünen terim saniye cinsinden ilave edilmiş olur. Sonra, bölen terim tarafına geçilir ve ilk olarak elli iki derece altmışla çarpılıp dakikaya çevrilir ve daha sonra altında bulunan elli altı dakika çarpım sonucuna eklenir. Bunun ardından, toplam, bir defa daha altmışla çarpılıp, çarpım neticesi üzerine altında bulunan yirmi sekiz saniye ilave edilerek bölen terim tarafı da saniyeye dönüştürülür. Nihayet, bölünen tarafın üç bin iki yüz kırk kere bin saniyesi, bölen tarafın yüz doksan bini beş yüz seksen sekiz saniyesine bölündüğünde AC kenarının on yedi ẕirâᶜ olduğu görülür.[76]

[73] $$\frac{\overline{MC}}{\overline{AC}} = \frac{\sin A}{\sin M}$$

$$\frac{15}{\overline{AC}} = \frac{52\ 56\ 28}{60}$$

$$\overline{AC} = \frac{15.60}{52\ 56\ 28} = 17$$

[74] Ebced hesabı.

[75] Bugün kullandığımız rakamlama ve hesaplama usulü.

[76] $15^\circ . 60^\circ = 900^\circ$

$900^\circ . 60 = 54000'$

$54000' . 60 = 3240000''$

$52^\circ . 60 = 3120'$

$3120' + 56' = 3176'$

$3176' . 60 = 190560''$

$190560'' + 28'' = 190588''$

$3240000'' : 190588'' = 17$ ẕirâᶜ.

Ve eğer AC kenarının ẓirâʿ miktarı, ikinci itibara göre çıkarsanmak istenirse, BC kenarının miktarı olan yirmi bir ẓirâʿnın AC kenarının bilinmeyen ẓirâʿına oranı, birinci kenarı gören geniş açının sinüsü olan 59 17 39, yani elli dokuz derece on yedi dakika ve otuz dokuz saniyenin, bilinmeyen kenarı gören dar açının sinüsü olan kesirsiz kırk sekiz dereceye oranı gibi olduğundan, meçhul yine ikincide bulunacak ve bilinen tarafların yüzeyi olan[77] bin sekiz tam sayısı, bilinen orta olan ve daha önce söz konusu edilen sinüse bölündüğünde, AC kenarının yine on yedi ẓirâʿ olduğu görülecektir.[78]

Eğer dilersen, bilinmeyen AC kenarının miktarının on yedi ẓirâʿ olduğunu, iki itibara göre ve bu defa C dar açısının sinüsünün yardımıyla bulabilirsin.

İkinci Sınıf: Bilinen iki kenar arasındaki bilinen açının, bir geniş açı olmasıdır. Bu durumda, bilinen kenarlardan biri geniş açının bulunduğu taraftan üçgenin dışına doğru doğrusal olarak uzatılıp, birinci sınıfta anlatılan işlemlerin aynısı icra olunarak bilinmeyenler bulunur.

Mesela, CMN geniş açılı üçgeninde CM kenarının on beş ẓirâʿ, CN kenarının yirmi iki ẓirâʿ ve aralarındaki C geniş açısının yayının yüz iki derece elli dakika ve sinüsünün ise 58 30, yani elli sekiz buçuk derece olduğu malum[79] ve geriye kalan iki dar açı ile bir kenar meçhul olsa, şimdi, örneğin CN kenarı, geniş açı tarafından doğrusal olarak H noktasına kadar uzatılır. Ondan sonra bilinen kenar olan CM kenarıyla bilinmeyen kenar olan NM kenarının birbirine kavuştuğu M dar açısından, uzatılan

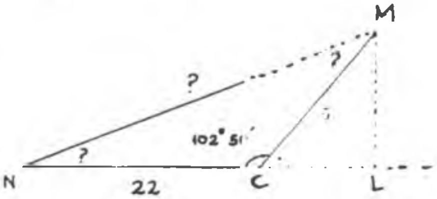
[77] 21 ile 48'in çarpımı.

[78]
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\sin A}{\sin B}$$

$$\frac{21}{\overline{AC}} = \frac{59\ 17\ 39}{48}$$

$$\overline{AC} = \frac{21.48}{59\ 17\ 39} = 17$$

[79]



kenar üzerine, üçgenin dışında, ML dikmesi gibi bir dikme inilir. Böylece, geniş açılı üçgenden başka MCL dik açılı üçgeni gibi bir üçgen daha oluşur ve bu yeni üçgenin iki açısı ile MC kenarı malumdur. Çünkü, bir doğru çizginin üzerine, başka bir doğru çizgi indirilirse, bu indirilen çizginin iki tarafında oluşan iki açının toplamı, bu iki açı gerek iki dik açı ve gerekse bir dar açı ile bir geniş açı olsun, her durumda iki dik açı miktarı kadar olacağından, bu yeni üçgenin C dar açısı, bilinen geniş açının yüz seksene tamlayanı kadar olacaktır. Öyleyse, bahsedilen geniş açının yayı olan yüz iki derece elli dakika, yüz seksen dereceden çıkarıldığında, artan 77 10, yani yetmiş yedi derece on dakika söz konusu dar açının yayı olur; ve bunun sinüsü ise, bahsedilen geniş açının da sinüsü olan elli sekiz buçuk derecedir. Bahsedilen bu dar açının yayı doksandan çıkarıldığında, artan 12 50, yani on iki derece elli dikaka yeni oluşan üçgenin M dar açısının yayı olur ve bunun sinüsü ise 13 19 37, yani on üç derece on dokuz dakika ve otuz yedi saniyedir.

Şimdi, bu yeni üçgenin dik açısının kirişi durumundaki CM kenarının miktarı olan on beş ẕirâʿnın, indirilen dikmenin bilinmeyen ẕirâʿına oranı, altmış adedin elli sekiz buçuk adede oranı gibi olduğundan ve yine CM kenarının miktarı olan on beş ẕirâʿnın CL kenarının bilinmeyen ẕirâʿına oranı, altmış adedin on üç derece on dokuz dakika ve otuz yedi saniyeye oranı gibi olduğundan, işlemden sonra, dikmenin 14 37 30, yani on dört ẕirâʿ otuz yedi ẕirâʿdakikası ve otuz ẕirâʿ saniyesi[80] olduğu ve CL kenarının ise 3 19 54, yani üç ẕirâʿ on dokuz ẕirâʿ dakikası ve elli dört ẕirâʿ saniyesi olduğu bulunur.[81]

[80] Gelenbevî, burada, ẕirâʿnın kesirlerini altmışlık usule göre ifade etmektedir.

[81]
$$\frac{\overline{CM}}{\overline{ML}} = \frac{\sin L}{\sin C}$$
$$\frac{15}{\overline{ML}} = \frac{60}{58\ 30}$$
$$\overline{ML} = \frac{15.58\ 30}{60} = 14\ 37\ 30$$
$$\frac{\overline{CM}}{\overline{CL}} = \frac{\sin L}{\sin M}$$
$$\frac{15}{\overline{CL}} = \frac{60}{13\ 19\ 37}$$
$$\overline{CL} = \frac{15.13\ 19\ 37}{60} = 3\ 19\ 54$$

CL kenarının miktarı, geniş açılı üçgenin bilinen CN kenarının miktarı olan yirmi iki ẓirâʿya eklendiğinde, dikme ayağı ile bilinmeyen N dar açısı arasında kalan NL hattının ẓirâʿının 25 19 54, yani yirmi beş ẓirâʿ on dokuz ẓirâʿ dakikası ve elli dört ẓirâʿ saniyesi olduğu bilinecek[82] ve NLM dik açılı üçgeninde ise, biri NL kenarı ve diğeri ML dikmesi olmak üzere iki kenar ile aralarındaki dik açının bilindiği görülecektir. Şimdi, NL kenarının bahsedilen ẓirâʿının, dikmenin bahsedilen ẓirâʿına oranı, yarıçapın, bilinmeyen N dar açısının tanjantına oranı gibi olduğundan, tanjant teoremi hükmüyle, dikmenin bahsedilen ẓirâʿı altmış adede çarpılıp, çarpım neticesi NL kenarının bahsedilen ẓirâʿına bölündüğünde, bahsedilen dar açının tanjantının 34 38 27, yani otuz dört derece otuz sekiz dakika ve yirmi yedi saniye olduğu ve tanjant cetvelinden yaylaştırıldıktan sonra yayının tam otuz derece ve sinüsünün ise, sinüs cetvelinden sinüsleştirildikten sonra, yine otuz derece olduğu görülür.[83] Ondan sonra, bu otuz derecelik yay geniş açının yayına eklenip, toplam yüz seksen dereceden çıkarıldığında, geriye kalan 47 10, yani kırk yedi derece on dakika, geniş açılı üçgenin M dar açısının yayı olur; sinüsleştirildikten sonra, bu yayın sinüsünün ise kırk dört derece olduğu görülür.[84]

Böylece geniş açılı üçgenin üç açısı ile iki kenarı bilineceğinden, ikinci kısım hükmüyle, geniş açının kirişi olan bilinmeyen NM kenarının da ẓirâʿı bulunabilir. Eğer bilinen kenarın CN kenarı olduğu varsayılırsa, bu taktirde, bilinmeyenin yirmi iki ẓirâʿya oranı elli sekiz buçuk sinüsün kırk dört sinüse oranı gibidir[85] ve eğer bilinen kenarın CM kenarı olduğu var-

82 $\overline{CN} + \overline{CL} = \overline{NL}$

$22 + 3\ 19\ 54 = 25\ 19\ 54$

83 $\frac{\overline{NL}}{\overline{ML}} = \frac{60}{\text{tg } N}$

$\frac{25\ 19\ 54}{14\ 37\ 30} = \frac{60}{\text{tg } N}$

$\text{tg } N = \frac{14\ 37\ 30 \,.\, 60}{25\ 19\ 54} = 34\ 28\ 27$

$\sphericalangle N = 30°$

$\sin N = 30$

84 $\sphericalangle M = 180° - (102°\ 50' + 30°) = 47°\ 10'$

$\sin M = 44$

85 $\frac{\overline{NM}}{\overline{CN}} = \frac{\sin C}{\sin M}$

$\frac{\overline{NM}}{22} = \frac{58\ 30}{44}$

$\overline{NM} = \frac{22 \,.\, 58\ 30}{44} = 29\ 15$

sayılırsa, yine bilinmeyenin on beş ziraya oranı, elli sekiz buçuk sinüsün otuz sinüse oranı gibidir.[86] İki orantıda da, bilinmeyen birincide bulunduğundan, birinci orantıda, yirmi iki adedin elli sekiz buçuk adede çarpımının neticesi olan bin iki yüz seksen yedi adet, bilinen taraf olan kırk dört adete bölündüğünde, bilinmeyen NM kenarının ẓirâʿı olan yirmi dokuz ẓirâʿ ve bir çeyrek ẓirâʿ bulunur; ve ikinci orantıda ise, onbeş adedin elli sekiz buçuk adede çarpımının neticesi olan sekiz yüz yetmiş yedi buçuk adet, bilinen taraf olan otuz adede bölündüğünde bahsedilen bilinmeyen kenarın yine yirmi dokuz ẓirâʿ ve bir çeyrek ẓirâʿ olduğu görülür. Diğerlerini bununla kıyasla.

Uyarı: Açıklandığı üzere, bilinen kenar, bilinen açı tarafından uzatılıp, bilinmeyen açıdan üçgenin dışına doğru çıkılan dikme, bunun üzerine indirildiğinde, birinci sınıfta dahi, bilinmeyen kenarların ve açıların bulunması mümkündür. Ancak bu sınıfta, üçgenin içine dikme indirmek suretiyle bilinmeyenlerin bulunması mümkün değildir ve dikmenin, mutlaka üçgenin dışına doğru çıkarılması gerekir.

Uyarı: Üçgenin, doyuran teorem ve tanjant teoremi ile bilinen kenarından bilinmeyen kenarının veya bilinmeyen açısı ile bilinen açısından bilinmeyen kenarının bulunması, üç bilginin içinde, kenar ile bir açının sinüsünün ya da tanjantının bulunmasına bağlıdır. Bu nedenle, sırf açıların bilinmesi ile üçgenlerin kenarları bilinemez. Ancak kenarların birbirine nisbeti bilinebilir ve örneğin kenarlardan birisi diğerinin yarısı ya da üçte biridir denilebilir.

Sırf kenarların bilinmesi ile de, dik açılı üçgenlerin dışındaki üçgenlerde açıların bilinmesi mümkün değildir. Ancak, kenarlar arasındaki oranlar gibi, sinüsler veya tanjantlar arasındaki oranlar bilinebilir.

Dik açılı üçgenlerde ise, daima dik açı ile sinüsü ve bu tip üçgenlere ait bir özellik olan bir devrin sekizde birinin tanjantı,[87] yani yarıçap bilindiğinden, bilginin sırf kenarlarla sınırlı kalması ihtimali geçerli olmayıp,

[86]
$$\frac{\overline{NM}}{\overline{CM}} = \frac{\sin C}{\sin N}$$
$$\frac{\overline{NM}}{15} = \frac{58\ 30}{30}$$
$$\overline{NM} = \frac{15 \,.\, 58\ 30}{30} = 29\ 15$$

[87] Bir devir 360 derece olduğuna göre, 45 derecenin tanjantı kastedilmektedir ki bu da yarıçapa eşittir.

iki kenar ve bir açı yardımıyla, bilinmeyen kenar ile bilinmeyen açı bulunur.

Gelin teoremi ile, sadece iki kenar bilindiğinde üçüncü kenar çıkarsanır. Bilinsin ya da bilinmesin burada asla açılara bakılmaz ve bu gelin teoremi yalnızca kenarların bulunmasına mahsustur. Bununla, açılardan birisinin sinüsü ve tanjantı öğrenilemez. Eğer dik açının kirişi altmış ẓirâᶜ olursa ve bu ẓirâᶜ ile dik açıyı teşkil eden kenarlardan biri daha bilinir ve üçüncüsü bilinmezse, o zaman durum değişir. Bu takdirde, çıkarsanan bilinmeyen kenar, bu bilinmeyen kenarı gören açının sinüsü ve bilinen diğer kenar ise, bu açının doksana tamlayanının sinüsü olur; veya dik açıyı teşkil eden kenarlardan biri altmış ẓirâᶜ olursa ve hipotenüsün de bu ẓirâᶜ ile miktarı bilinirse, bu taktirde çıkarsanan bilinmeyen kenar, bu bilinmeyen kenarı gören açının altmışlık tanjantı olur. Diğerlerini bununla kıyasla.

SONUÇ

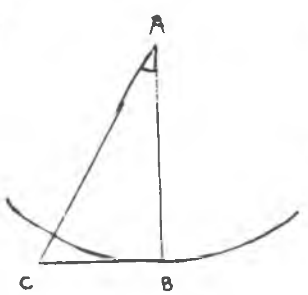
ÜÇGENLERE İLİŞKİN FAYDALAR BEYANINDADIR

Birinci Fayda: Dik açılı üçgenin kenarları bilinmezken, sadece bilinen bir dar açısından, sekantını çıkarsamanın üç yolu vardır.

Birinci Yol: Gelin teoremiyledir. Bilinen dar açının tanjantı ile bu tanjantın yarıçapından herbirinin karesi alınıp, iki kare toplanır ve toplamın karekökü alınırsa sekant bulunur.

Mesela, gelin teoremi ile tanjant teoreminde örneğimiz olan ABC üçgeninde, A dar açısının kırk beş derecelik tanjantı olduğu malum olup sekantı istense, bahsedilen tanjantın karesi olan iki bin yirmi beş adetle yarıçapın karesi olan üç bin altı yüz adedin toplamı olan beş bin altı yüz yirmi beş adedin karekökü alındığında, yukarda geçtiği üzere, yine yetmiş beş derecelik bir sekant bulunur[88] ve eğer sekantın karesinden yarı-

88



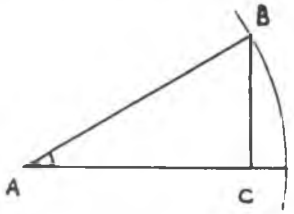
$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2\\ &= 45^2 + 60^2\\ &= 2025 + 3600\\ &= 5625\\ \overline{AC} &= \sqrt{5625}\\ &= 75\end{aligned}$$

çapın karesi çıkarılıp, geriye kalanın karekökü alınırsa tanjantı bulunur; tanjantın karesi çıkarılıp, geriye kalanın karekökü alınırsa yarıçapı bulunur. Böylece bu kıyasla, her yayın sinüsünün karesi ile tamlayanının sinüsünün[89] karesi toplanıp, toplamın karekökü alınırsa, yarıçapın yani altmış adedin elde edileceği görülür;[90] ve yarıçapın karesinden sinüsün karesi çıkarılıp, artanın karekökü alınırsa bu yayın kosinüsü,[91] kosinüsünün karesi çıkarılıp artanın karekökü alınırsa bu yayın sinüsü bulunur.[92]

Ayrıca bir yayın sinüsü ile sehminin[93] kareleri toplanıp, iki kare toplamının karekökü alınırsa bu yayın kirişi bulunur.[94]

89 $\sin(90-A) = \cos A$ olduğuna göre, bundan sonra $\cos A$'yı kullanabiliriz.

90



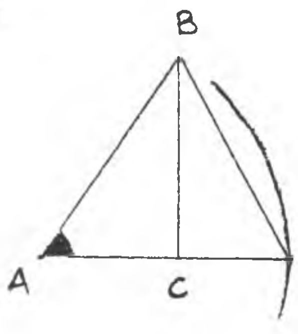
$\sin^2 A + \cos^2 A = 60^2$
$\sqrt{\sin^2 A + \cos^2 A} = \sqrt{60^2}$
$\sqrt{\sin^2 A + \cos^2 A} = 60$
Eğer $r = 1$ kabul edilirse,
$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$
eşitliğine ulaşılır.

91 $\sin^2 A + \cos^2 A = 60^2$
$\cos^2 A = 60^2 - \sin^2 A$
$\cos A = \sqrt{60^2 - \sin^2 A}$
Eğer $r = 1$ ise,
$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$ olur.

92 $\sin^2 A + \cos^2 A = 60^2$
$\sin^2 A = 60^2 - \cos^2 A$
$\sin A = \sqrt{60^2 - \cos^2 A}$
Eğer $r = 1$ ise,
$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$ olur.

93 Kosinüsü yarıçap büyüklüğüne tamamlayan trigonometrik uzunluğa 'sehm' (İng. versed sine) denir. Öyleyse yarıçap 60 iken, sehm $A = 60 - \cos A$ olur.

94

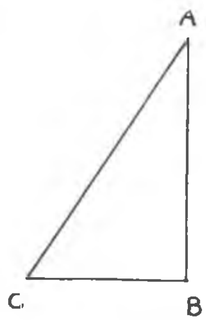


kiriş $A = BD$ olduğuna göre, pisagor teoreminden,
$BD^2 = BC^2 + CD^2$
$BD = \sqrt{BC^2 + CD^2}$
olacaktır. Şimdi, $BC = \sin A$ ve $CD =$ sehm $A = 60 - \cos A$ olduğundan,
kiriş $A = ED = \sqrt{\sin^2 A + (60 - \cos A)^2}$ olur.
Eğer $r = 1$ olsaydı,
kiriş $A = \sqrt{\sin^2 A + (1 - \cos A)^2}$
$= \sqrt{2.(1 - \cos A)}$ olacaktı.
$= \sqrt{2.\text{sehm } A}$

İkinci Yol: Sekantı istenen açının yayının yarısı alınıp, bu değer bir devrin sekizde birine eklenir ve toplamın, tanjant cetvelinden tanjantı alındıktan sonra, asıl yayın tanjantı, önceki tanjanttan çıkarılır. Artan, bu yayın sekantı olur.[95]

Mesela, yukarıdaki örneğimizde, A dar açısının sekantı istensin. Şimdi, bahsedilen dar açının yayı olan 36 52, yani otuz altı derece elli iki dakikanın yarısını alır ve 18 26, yani on sekiz derece yirmi altı dakika buluruz. Ondan sonra, bu yay miktarını, bir devrin sekizde biri olan 45, yani kırk beş derecelik yaya eklersek 63 26, yani altmış üç derece yirmi altı dakikalık bir yay elde ederiz. Bu toplamın tanjant cetvelinden tanjantını aldığımızda, bunun 119 59, yani yüz on dokuz derece elli dokuz dakika olduğunu görürüz. İlk yayın tanjantı olan 44 59, yani kırk dört derece elli dokuz dakikayı bu tanjanttan çıkardığımızda, sekantı 75, yani yetmiş beş derece olarak buluruz.[96]

Üçüncü Yol: Bilinen dar açının tanjantı altmış adede çarpılıp, çarpımın neticesi, bahsedilen dar açının sinüsüne bölündüğünde, bölüm neticesi bu açının yayının sekantı olur.[97]

[95] 

$$\left(\frac{A}{2}+45^\circ\right)-\text{tg } A=\sec A$$

[96] $\sec A = \text{tg}\left(\frac{A}{2}+45^\circ\right)-\text{tg } A$ olduğuna göre,

eğer, $A=36^\circ\ 52'$ ise,

$$\begin{aligned}\sec A &= \text{tg}\left(\frac{36^\circ\ 52'}{2}+45^\circ\right)-\text{tg } 36^\circ\ 52'\\ &= \text{tg}\ (18^\circ\ 26'\ +45^\circ)-\text{tg } 36^\circ\ 52'\\ &= \text{tg } 63^\circ\ 26'-\text{tg } 36^\circ\ 52'\\ &= 119\ \ 59-44\ \ 59\\ &= 75\end{aligned}$$

olur.

[97] $\sec A=\dfrac{\text{tg } A\ .\ 60}{\sin A}$

Mesela, yukardaki örneğimizde dar açının tanjantı olan kırk beş adedin altmış adede çarpımının neticesi olan iki bin yedi yüz adet, bahsedilen dar açının sinüsü olan otuz altı adede bölündüğünde, bu yayın sekantının yine yetmiş beş derece olduğu görülür.[98] Diğerlerini bununla kıyasla.

İkinci Fayda: Eğer üçgen, bir eşkenar üçgen olursa, yani üç kenarından herbiri diğer kenarlarına eşit olursa — bütün kenarlarının onar zirâ' olması gibi — dar açılı bir üçgen olur. Bu üçgenin bütün açıları da birbirine eşittir ve her açının yayının altmış derece olması gerekir. Böylece onun bütün açıları bilinir.

Eğer üçgen, bir ikizkenar üçgen ise, yani iki kenarı birbirine eşit bir üçgen ise, sadece bir açısı bilindiğinde, bütün açılarının bilinmesi gerekir. Zira eğer bilinen açı, eşit iki kenar arasında bulunan açı ise, bunun yayı yüz seksenden çıkarılıp, artan ikiye bölündüğünde, her yarım, eşit kenarları gören iki açıdan herbirinin yayı olur. Çünkü bu iki açı birbirine eşittir. Eğer bilinen açı, eşit iki açıdan biri ise, bunun yayı benzerinin yayına eşit olduğundan, ikisi toplanıp yüz seksenden çıkarıldığında, eşit iki kenarın arasında kalan açının yayı bulunur.

Ancak bu iki üçgenin dışındaki üçgenlerde, bütün açıların bilinmesi, iki açının bilinmesine bağlıdır. Sadece kenarların ya da bir açının bi-

---

Eğer r = 1 olursa,

$$\sec A = \frac{\operatorname{tg} A}{\sin A} = \frac{\frac{\sin A}{\cos A}}{\sin A} = \frac{\cancel{\sin} A}{\cos A} \cdot \frac{1}{\cancel{\sin} A} = \frac{1}{\cos A}$$

bilinen teoremine dönüştürülebilir.

[98] $$\sec A = \frac{\operatorname{tg} A \cdot 60}{\sin A} = \frac{\operatorname{tg} 36^\circ\ 52' \cdot 60}{\sin 36^\circ\ 52'} = \frac{45 \cdot 60}{36} = 75$$

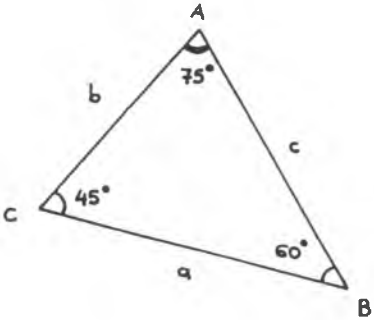
linmesi ile bütün açıların bilinmesi mümkün değildir. Fakat bütün kenarlar malumken, açılardan birinin kirişi üzerine, bu açıdan —aşağıdaki şekilde ve üçgenin içinde veya dışında— bir dikme inildiğinde, dik açılı olmayan bu üçgen iki dik açılı üçgene ayrılacağından, öncelikle herbir üçgenin, gelin teoremi hükmüyle bütün kenarları çıkarsanır ve ondan sonra tanjant teoremi hükmüyle bütün açıları bulunursa durum değişir. Öyleyse bu yöntem sayesinde, sadece kenarların bilinmesi ile bütün açılar bilinebilir.

Ancak bütün açılar malumken, kenarlardan birisi muayyen bir ẓirâʿile malum değilse, bunlardan herhangi birinin bu ẓirâʿ miktarı ile bilinmesi mümkün değildir. Bu durumda, yalnızca, bir kenarın diğer bir kenarın üçte biri veya dörtte biri olması gibi, kenarların birbirlerine olan oranları bilinebilir. Eğer üç kenarın ẓirâʿları toplamı malumsa, o zaman, üç açının sinüsleri toplanır ve sinüler toplamının bir açının sinüsüne oranı, ẓirâʿlar toplamının, bu açının kirişi olan kenarın bilinmeyen ẓirâʿına oranı gibi olduğundan, her kenarın ẓirâʿı bu yöntemle bulunabilir.[99]

Üçüncü Fayda: Bütün kenarları bilinen bir üçgenin bir açısından kirişi üzerine, üçgenin içinde ya da dışında, bir dikme indirmek için, dikme merkezinin, bu kirişin iki tarafında bulunan açılardan uzaklığının bilinmesi hakkındadır.

Üçgen, gerek dik açılı üçgen, gerek geniş açılı üçgen ve gerekse dar açılı üçgen olsun ve gerek açıları bilinsin, gerekse hiçbir açısı bilinmesin, bir açısından bu açının kirişi üzerine bir dikme indirmek istenirse, öncelikle, bu kiriş üzerinde bulunan noktalardan hangisinin dikme ayağı olduğunun bilinmesi gerekir. Kuralı şudur: bu açıyı oluşturan iki kenarın kareleri birbirinden çıkarılıp iki kare farkı elde edilir; ve eğer iki kenar

[99] Örneğin, bir ABC üçgeninde, a + b + c = 32 ẓirâʿ olsun ve c kenarının ẓirâʿ cinsinden uzunluğu istensin:



sin 75° = 57 57
sin 60° = 51 57
+ sin 45° = 42 25

152 19

olduğundan,

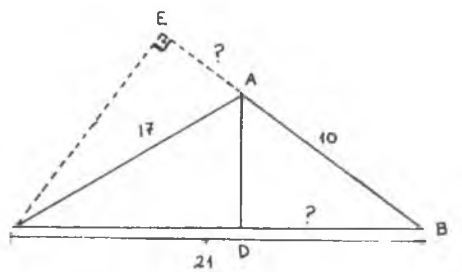
$\dfrac{152\ 19}{42\ 25} = \dfrac{32}{c}$ orantısından

c = 8.91 ẓirâʿ olur.

arasında bulunan fark, iki kenar toplamına çarpılırsa, yine iki kare farkı bulunur. Daha sonra, iki kare farkı, bu açının kirişi olan üçüncü kenarın uzunluğuna bölünüp, bölüm neticesine bakılır. Eğer bölüm neticesi, bölen durumundaki kirişe eşit ise önceki iki kenardan daha kısa olanı bu kiriş üzerine diktir; ve eğer daha küçükse, dikme, üçgenin içinde, daha büyükse üçgenin dışındadır. Bu durumda, kiriş, yönü doğrultusunda uzatılıp, üçgenin dışında üzerine dikme indirilir.

Her iki durumda da bölüm neticesi ile kiriş birbirinden çıkarılıp aralarındaki fark elde edildikten sonra, bu miktar ikiye bölünürse, kiriş üzerine indirilerek dikmenin ayağının, kirişle önceki iki kenardan daha kısa olanının birleştiği köşeden bu yarım büyüklük kadar uzak olduğu ve merkezin, birinci durumda üçgenin içinde ve ikinci durumda ise üçgenin dışında bulunduğu görülür.

Mesela, yukarda da örneğimiz olan ABC geniş açılı üçgeninde, AB kenarı on zirâʿ AC kenarı on yedi zirâʿ ve geniş açının kirişi olan BC kenarı ise yirmi bir zirâʿdır.[100] A geniş açısından, bu açının kirişi olan BC kenarı üzerine bir dikme indirmek istersek, geniş açıyı oluşturan AB ve AC kenarlarının kareleri arasındaki yüz seksen dokuz adetlik farkı, söz konusu kirişin zirâʿ miktarı olan yirmi bir adede böler ve bölümün neticesi olan dokuz adedi, bölen konumundaki kirişin miktarı olan yirmi bir adetten çıkarırız; on iki adedin yarısı olan altı zirâʿ miktarı, A açısını teşkil eden iki kenarın en kısası ile kirişin birbirine birleştiği B açısından dikme merkezinin uzaklığıdır. Bölüm neticesi, kirişin adedinden az olduğu için dikmenin, üçgenin içinde olduğu anlaşılır.[101]

100 

101 Bu kural şu şekilde formüle edilebilir:

$$\overline{BD} = \frac{\overline{BC} - \dfrac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2}{\overline{BC}}}{2} = \frac{21 - \dfrac{17^2 - 10^2}{21}}{2} = 6$$

$9<\overline{BC}$ olduğu için, dikme merkezi (ayağı) üçgenin içinde bulunacaktır.

Ve eğer C dar açısından, bu açının kirişi olan AB kenarı üzerine bir dikme indirmek istenirse, söz konusu dar açıyı sınırlayan AC ve BC kenarlarından herbirinin kareleri alınıp, küçük kare büyük kareden çıkarılmakla ya da iki kenar arasında bulunan dört adet fark, iki kenar toplamı olan otuz sekiz adede çarpılmakla iki kare farkı yüz elli iki adet olarak bulunur; ondan sonra bu değer, kirişin miktarı olan on adede bölündüğünde, bölüm neticesi on beş ve beşte bir adet olacak ve bundan kirişin adedi olan on adet çıkarılarak geriye kalan beş ve beşte bir adedin yarısı alınacaktır. Böylece dikme merkezinin, kiriş ile söz konusu iki kenarın en kısasının birbirine birleştiği A açısından uzaklığının iki ẕirâᶜ ve üç tane beşte bir ẕirâᶜ olduğu görülecektir.[102] Bölüm neticesi, bu defa, kiriş miktarından daha büyük olduğu için dikme ayağının üçgenin dışında olduğu anlaşılır.

Diğer Bir Yol: Üçgenin kenarlarından birisinin karesi ile geriye kalan iki kenarın kareleri toplamının arasında bulunan fark alındıktan sonra, iki kenardan biri taban varsayılıp, bulunan farkın yarısı bu tabanın uzunluğuna bölündüğünde, tabanı gören açıdan taban üzerine indirilen dikme merkezinin, birinci kenarı gören açıdan olan uzaklığı elde edilmiş olur.

Eğer birinci kenarın karesi ile geriye kalan iki kenarın kareleri toplamı arasında fark yoksa, birinci kenarın gördüğü açı bir dik açıdır; eğer fark varsa ve fazlalık birinci kenarın karesine ait ise dikme ayağı, bölmeden elde edilen miktar kadar üçgenin dışındadır ve eğer fazlalık kareler toplamına ait ise ve farkın yarısı üçgen tabanının karesine eşitse, üçgen yine bir dik açılı üçgen olup, birinci kenar ile tabanın teşkil ettikleri açı bir dik açıdır; eğer küçükse, dikme ayağı, söz konusu miktar kadar üçgenin içinde, büyükse, söz konusu miktarın taban büyüklüğünden farkı kadar üçgenin dışındadır.

Geçen örneğe göre, A geniş açısından, bu açının kirişi olan BC kenarı üzerine bir dikme indirildiğinde, dikme merkezinin B ve C açılarından kaç ẕirâᶜ uzaklıkta bulunduğunu bilmek için, evvela geniş açının kirişi olan BC kenarı taban kabul edilir; ondan sonra, iki kısa kenardan biri olan

[102] Şu şekilde formüle edilebilir:

$$\overline{AE} = \frac{\dfrac{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{\overline{AB}} - \overline{AB}}{2} = \frac{\dfrac{21^2 - 17^2}{10} - 10}{2} = 2 \quad 3\frac{1}{5}$$

$15 > \overline{AB}$ olduğu için, dikme ayağı üçgenin dışında bulunacaktır.

AC kenarının karesi iki yüz seksen dokuz adet, taban ile diğer kısa kenarın kareleri toplamı olan beş yüz kırk bir adetten çıkarılıp, aralarındaki iki yüz elli iki adet farkın yarısı olan yüz yirmi altı adet, taban miktarı olan yirmi bir adete bölündüğünde, dikme ayağının, ilk kısa kenarın gördüğü B açısından uzaklığının bölüm neticesi olan altı ẓirâᶜ miktarı olduğu görülür.[103]

Burada elde edilen fazlalık kareler toplamına aittir ve yarısı olan yüz yirmi altı adet, taban büyüklüğünün karesi olan dört yüz kırk bir adetten daha az olduğu için, dikme merkezinin, üçgenin içinde olduğu anlaşılır.

Eğer söz konusu fazlalığın yarısı olan yüz yirmi altı adet, AB kenarı taban kabul edilip, bu tabanın miktarı olan on adede bölünürse, bölüm neticesi olan on iki ve üç tane beşte bir, tabanı gören C açısından taban üzerine indirilen dikmenin ayağının, birinci kenar olan AC kenarını gören B açısından uzaklığıdır.

Yine fazlalık iki kare toplamına ait olup, yarısı olan yüz yirmi altı adet, tabanın karesi olan yüz adetten büyük olduğu için, dikme ayağı, bölüm neticesinin[104] taban büyüklüğünden farkı kadar üçgenin dışında bulunmalıdır. Tabanın ẓirâᶜ adedi olan on adedi, bölüm neticesi olan on iki ve üç tane beşte birden çıkardığımızda, C açısından BA tabanı üzerine indirilen dikmenin merkezinin, üçgenin dışında, A açısından iki ẓirâᶜ ve üç tane beşte bir ẓirâᶜ uzaklıkta bulunduğu görülür. Birinci yolla da aynı neticeye ulaşılmıştı.

Uyarı: Üçgen içinde, üçgenin bir kenarına indirilen bir dikme için en kısa yol.

En uzun kenar daima taban varsayılıp, iki kısa kenardan birinin karesi, geriye kalan iki kenarın kareleri toplamından çıkarılır. Çıkan, tabanın iki katına bölündüğünde, iki kısa kenar arasında bulunan açıdan taban

[103] Şu şekilde formüle edilebilir:

$$\overline{BD} = \frac{\frac{(\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2) - \overline{AC}^2}{2}}{\overline{BC}} = \frac{\frac{(21^2 + 10^2) - 17^2}{2}}{21} = 6$$

[104] $126:10 = 12 \quad 3\,\frac{1}{5}$

üzerine indirilecek dikmenin merkezinin, en kısa kenarın diğer ucundan olan uzaklığı bulunmuş olur.[105]

Örneğimizde, A geniş açısından BC tabanı üzerine indirilecek dikmenin ayağının C açısından uzaklığının kaç ẓirâʿ olduğu bilinmek istenirse, BA kısa kenarının karesi olan yüz adet, geriye kalan iki kenarın kareleri toplamı olan yedi yüz otuz adetten çıkarılır. Çıkan altı yüz otuz adet, tabanın iki katı olan kırk iki adete bölündüğünde, tabanı gören A açısından taban üzerine indirilen dikmenin merkezinin, BA kenarını gören C açısından uzaklığının on beş ẓirâʿ olduğu görülür.[106] Diğerleri buna kıyasla bulunabilir.

Dördüncü Fayda: En uzun kenar üzerine, üçgenin içinde, bir dikme indirilip, bu kenar, dikme ayağının iki tarafında iki kısma bölündüğünde, bu iki kısmın kareleri farkı, daima, dikme başına bitişen iki kısa kenarın kareleri farkına eşittir.

Örneğimizde, A açısından BC uzun kenarı üzerine indirilen dikmenin ayağının bir tarafında uzun kenardan on beş ẓirâʿ, diğer tarafında ise altı ẓirâʿ bulunduğundan, uzun kenarın miktarı olan yirmi bir adet iki kısma bölünmüştür. Bu iki kısımdan altı adedin karesi olan otuz altı adet, on beş adedin karesi olan iki yüz yirmi beş adetten çıkarıldığında bulunan yüz seksen dokuz adetlik fark, dikme başına bitişen kenarlardan AB kenarının karesi olan yüz adet, AC kenarının karesi olan iki yüz seksen dokuz adetten çıkarıldığında bulunan yüz seksen dokuz adetlik farka eşittir.[107]

[105] Şu şekilde formüle edilebilir:

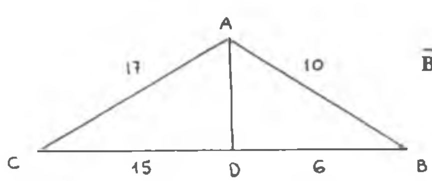
$$\overline{BD} = \frac{(\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2) - \overline{AC}^2}{2\,\overline{BC}} = \frac{(21^2 + 10^2) - 17^2}{2.21} = 6$$

$\overline{AB}$'nin tesbiti için Gelenbevî'nin zikrettiği üç bağıntı, esasen tek bir bağıntının muhtelif türevleridir ve basit cebirsel işlemlerle elde edilebilir.

[106]

$$\overline{CD} = \frac{(\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2) - \overline{BA}^2}{2\,\overline{BC}} = \frac{(17^2 + 21^2) - 10^2}{2.21} = 15$$

[107]



$$\overline{BD}^2 - \overline{DB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$$
$$15^2 - 6^2 = 17^2 - 10^2$$
$$189 = 189$$

İki kare farkı, en küçük kareye ilave edildiğinde en büyük kare ve iki kare farkı en büyük kareden çıkarıldığında, en küçük kare bulunur.[108]

Şimdi, uzun kenarı üzerine, bu kenarın gördüğü açıdan bir dikme indirilen üçgenlerde, uzun kenar ile iki kısa kenardan biri malum diğeri meçhul ise, meçhul olan bu üçüncü kenarın, doyuran teoreme ilişkin hükümlerde yazıldığı gibi, bilinen iki kenar arasında bulunan bilinen açı yardımıyla veya ölçerek veya sadece uzun kenar üzerindeki dikme ayağının iki uçtan olan uzaklığını bilmek suretiyle ve dikme miktarı ile diğer üçgenlerin açılarına müracaat olunmaksızın çıkarsanması imkanı vardır.

Mesela, geçen örneğimizde, AB kenarının on ẓirâʿ, BC kenarının yirmi bir ẓirâʿ ve A açısından BC uzun kenarı üzerine indirilen dikmenin merkezinin B açısından uzaklığının altı ẓirâʿ, C açısından uzaklığının ise on beş ẓirâʿ olduğu malum, ancak AC kenarının kaç ẓirâʿ olduğu meçhul olsun ve istensin. Şimdi, altı adedin karesi olan otuz altı adet, on beş adedin karesi olan iki yüz yirmi beş adetten çıkarıldığında kalan yüz seksen dokuz adet, sözü edilen iki kare sayı arasında bulunan fark olduğu gibi, aynı zamanda da, bilinen AB kenarının karesiyle, bilinmeyen AC kenarının karesi arasında bulunan farktır; ve bilinen AB kenarı, dikme merkezinin iki tarafında bulunan uzunluklardan küçük uzunluk yönündeyken, bilinmeyen kenar büyük uzunluk yönünde olduğu için, kendisi, bilinmeyen kenardan daha kısa ve karesi ise onun karesinden daha küçük olacaktır. Böylece, bahsi geçen yüz seksen dokuz adetlik fark, iki karenin küçüğü olan ve bilinen AB kenarının karesi yüz adede eklendiğinde, bulunan iki yüz seksen dokuz adet, bilinmeyen AC kenarının karesi olur. Bunun karekökü alınırsa, AC kenarının uzunluğunun on yedi ẓirâʿ olduğu görülür.[109]

Şimdi, dikme ayağının iki yanında, uzun kenardan iki kısmın kareleri farkının, dikme başına bitişen iki kenarın kareleri farkına, eşit olduğu

[108] $15^2 - 6^2 = 17^2 - 10^2$ eşitliğinde, iki kare farkı 189 olduğuna göre,
$189 + 6^2 = 15^2$ veya $189 + 10^2 = 17^2$
$15^2 - 189 = 6^2$ veya $17^2 - 189 = 10^2$
olur.

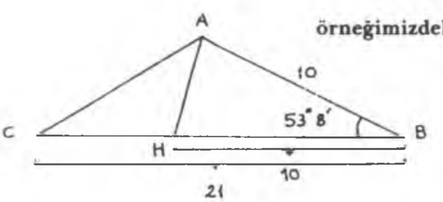
[109]
$$\begin{aligned}
\overline{CD}^2 - \overline{DB}^2 &= \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 \\
15^2 - 6^2 &= \overline{AC}^2 - 10^2 \\
225 - 36 &= \overline{AC}^2 - 100 \\
189 &= \overline{AC}^2 - 100 \\
\overline{AC}^2 &= 189 + 100 \\
\sqrt{\overline{AC}^2} &= \sqrt{289} \\
\overline{AC} &= 17
\end{aligned}$$

mahallinde sabit olduğu halde, dikme miktarına ve sair açılara müracaat etmeksizin, sadece uzun kenarı, iki kısa kenardan birini ve dikme ayağının iki yanındaki uzunlukları bilmek suretiyle, bilinmeyen diğer kenarın çıkarsanabileceği hususu bu fakirin zihninin icatlarındandır.

Beşinci Fayda: İkizkenar üçgenin şöyle bir özelliği vardır: Sadece iki kenarı ile aralarındaki açının bilindiği ve diğer kenarı ile açılarının çıkarsanmasında dikme çizimine muhtaç olunan üçgenlerde, bilinen iki kenardan kısa olanı kadar uzun olandan bir kısım ayrılır ve bir nokta belirlenir; daha sonra dikme yerine geçen, kısa kenarın bitim yerinden bu noktaya uzanan ve bilinen açının kirişi konumunda bulunan bir hatla, bu üçgenin içinde iki üçgen teşkil edilir. Bunlardan, bilinen açı tarafındaki bir ikizkenar üçgen, diğer taraftaki ise diğer bir üçgendir. Bu durumda, geriye kalan kenar ile açıların çıkarsanması mümkündür. Zira bilinen iki kenarın toplamının, aralarındaki farka oranı, sonradan teşkil edilen ikizkenar üçgende tabanın iki ucunda bulunan eşit iki açıdan birinin tanjantının, diğer tarafta oluşan üçgende, bilinen iki kenarın farkı büyüklüğünde olan kenarın gördüğü açının tanjantına oranı gibidir.[110] Oranlanmış dörtlü kuralıyla bu farkı (CH) gören açının tanjantı bulunup, sonuç yaylaştırıldıktan sonra, bu yay, ikizkenar üçgenin eşit iki açısından birinin yayına ilave edilirse, toplam, bilinen iki kenardan uzun kenarı gören açının yayı olur. Ondan sonra bu yay bilinen açının yayına eklenip, toplam, yüz seksenden çıkarıldığında, geriye bilinen iki kenardan kısa kenarı gören açının yayı kalır.

Mesela, geçen örneğimizde AB kenarının on ẕirâᶜ, BC kenarının yirmi bir ẕirâᶜ ve aralarında bulunan B açısının yayının 53 8, yani elli üç derece sekiz dakika olduğu malum, ancak AC kenarının kaç ẕirâᶜ ve A ve C açılarının yaylarının kaçar derece olduğu meçhul olsun. Şimdi, bilinen iki kenardan AB kısa kenarı kadar, BC uzun kenarından kesilip H noktası belirlendikten sonra AH tabanı çizilir; böylece asıl üçgenimiz içinde, B bilinen açısı tarafında ABH ikizkenar üçgeni ve diğer tarafta ise ACH

110



örneğimizdeki bu üçgene göre bahsedilen orantı,

$$\frac{\overline{BC}+\overline{AB}}{\overline{BC}-\overline{AB}} = \frac{\mathrm{tg}\,\widehat{BAH}}{\mathrm{tg}\,\widehat{HAC}}$$ olur.

üçgeni oluşur. Bilinen iki kenarın toplamı olan otuz bir[111] zirâ'nın, iki kenar farkı olan on bir zirâ'ya oranı, ikizkenar üçgende oluşan eşit iki açıdan herbirinin yayı 63 26, yani altmış üç derece yirmi altı dakika olduğundan, bu altmış üç derece yirmi altı dakikanın tanjantı olan 120 sayısının, yani yüz yirmi derecelik tanjantın[112], diğer tarafta oluşan üçgende, bilinen iki kenar arasındaki farka eşit HC kenarını gören HAC bilinmeyen açısının tanjantına oranı gibidir. Şimdi, bilinmeyen dördüncüde olduğundan, bilinen ortaların birbirine çarpımının sonucu olan bin üç yüz yirmi adet, bilinen taraf olan otuz bir adede bölündüğünde kırk iki derece ve bir derecenin otuz bir kısmında on sekiz kısmı[113] bulunur. Otuz bir kısımda on sekiz kısım altmışlık kesirlerle ifade edilecek olursa, bilinmeyen HAC[114] açısının tanjantı 42 34, yani kırk iki derece otuz dört dakika ve bunun tanjant cetvelinden alınan yayı ise 35 22, yani otuz beş derece yirmi iki dakika olur. Bu miktar, eşit iki açıdan BAH açısının yayı olan 63 26, yani altmış üç derece yirmi altı dakikaya ilave edildiğinde, bulunan 98 48, yani doksan sekiz derece kırk sekiz dakika bilinen iki kenardan, uzun kenar olan BC kenarını gören A açısının yayıdır. Bu yay, önceden bilinen açının yayı olan 53 8 yani elli üç derece sekiz dakikaya eklenip, toplam yüz seksenden çıkarıldığında, bilinmeyen C açısının yayı olan 28 4 yani yirmi sekiz derece dört dakika elde edilir.[115]

[111] Yanlışlıkla 21 olarak basılmıştır.

[112] Altmışlı sistemde,

$$\text{tg } 63^\circ\ 26' = 119,9915418$$

olur. Gelenbevî bunu 120'ye yuvarlamıştır. Birim uzunluk olan 60'ın iki katı olduğu için, burada 120'ye 'bir kez daha merfû' denilmiştir. 'Merfû' tabiri ile birim uzunluk kastedilmektedir.

[113] Gelenbevî, görüldüğü gibi, ya altmışlık kesirleri ya da bayağı kesirleri kullanmakta, ondalık kesirlerden habersiz görünmektedir.

[114] Yanlışlıkla HCA olarak basılmıştır.

[115]
$$\frac{\overline{BC}+\overline{AB}}{\overline{BC}-\overline{AB}} = \frac{\text{tg } \hat{BAH}}{\text{tg } \hat{HAC}}$$

$$\frac{21+10}{21-10} = \frac{\text{tg } 63^\circ\ 26'}{\text{tg } \hat{HAC}}$$

$$\frac{31}{11} = \frac{120}{\text{tg } \hat{HAC}}$$

$$\text{tg } \hat{HAC} = \frac{11.120}{31} = 42\frac{18}{31}$$

Böylece asıl üçgenimizde iki kenar ile üç açının yayları malum oldu. Geriye kalan AC bilinmeyen kenarı ise, doyuran teorem hükmüyle çıkarsanabilir. Diğer meseleleri bununla mukayese ederek çözebilirsin.

Allah'ın ihsanlarının yardımlarıyla tamamlandı; İsmail Gelenbevî kulunun güçsüz eliyle yazıldı. 1220[116] senesinde Dârü't-Tıbaʿa'da basıldı.

$\frac{18}{31} . 60 \cong 34$ olduğundan,

$\operatorname{tg} \overset{<}{HAC} = 42\ 34$

$\overset{<}{HAC} = 35^\circ\ 22'$

olur

$\overset{<}{A} = \overset{<}{BAH} + \overset{<}{HAC} = 63^\circ\ 26' + 35^\circ\ 22' = 98^\circ\ 48'$

$\overset{<}{C} = 180^\circ - (\overset{<}{A} + \overset{<}{B}) = 180^\circ - (98^\circ\ 48' + 53^\circ\ 08') = 28^\circ\ 4'$

[116] Miladî 1805-6.

SÖZLÜK

ᶜamûd: dikme.
ᶜakşu'n-nisbet: orantının tersi.
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ orantısının tersi olan 1) $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ ve 2) $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$ orantıları.
aslu'n-nisbet: oranlanmış dörtlünün esas hali, yani $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
bedelu'n nisbet: orantının başka bir orantıya dönüştürülmesi.
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ orantısının dönüştürülmüş hali $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ orantısıdır.

ceyb: sinüs.
cezr: karekök.
dılᶜ: kenar.
derece: bir yayın, bir trigonometrik uzunluğun veya zirâᶜnın en küçük birimi; örneğin bir dairenin 360'da biri.
erbaᶜa-i mütenâsibe: oranlanmış dörtlü, orantı.
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
Bu orantıda, a: birinci
b: ikinci
c: üçüncü
d: dördüncü
olarak adlandırılmaktadır.
hatt: çizgi.
hatt-ı müstakîm: doğru çizgi.
kâme: birim dairenin yarıçapı, birim uzunluk, birim çubuğu.
kavs: yay.
kutr-ı zıll: gölge çapı, bir yayın sekantı veya kosekantı.
kutr-ı zıll-ı evvel: birinci gölge çapı, sekant.
kutr-ı zıll-ı sânî: ikinci gölge çapı, kosekant.
merkez-i ᶜamûd: dikme ayağı.
murabbaᶜ: 1) kare; 2) bir sayının karesi.
musattah: yüzeylendirme, çarpma.
müselles: üçgen.
müselles-i haddü'z-zevâyâ: dar açılı üçgen.
müselles-i kâimü'z-zâviye: dik açılı üçgen.
müselles-i münfericü'z-zâviye: geniş açılı üçgen.
müselles-i mütesâviü'l-adlâᶜ: eşkenar üçgen.
müselles-i mütesâviyü's-sakeyn: ikizkenar üçgen.
rubᶜ-ı dâire: çeyrek daire.
sehm: kosinüsü yarıçap büyüklüğüne tamamlayan tirgonometrik uzunluk.
sehm A = 60 − cos A

saṭḥ-ı müstevî: düzlem yüzey.
şekl: teorem.
şekl-i ʿarûs: gelin teoremi, pisagor teoremi.
şekl-i muġnî: doyuran teorem, sinüs teoremi.
şekl-i ẓıllî: tanjant teoremi.
ṭarafeyn: iki taraf, dışlar;

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ orantısında}$$

a ve d nicelikleri.
tʿadîl-i mâbeyne's-saṭıreyn: aralama, interpolasyon işlemi.
taḳvîs: yaylaştırma, işlem ya da cetvel yardımıyla bir açının herhangi bir trigonometrik fonksiyonundan yayına geçme.
tecyîb: sinüsleştirme, işlem ya da cetvel yardımıyla bir yayın sinüsünü belirleme.
uṣûl-i sittînî: altmışlık sistem.
vasaṭeyn: iki orta, içler;

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ orantısında}$$

b ve c nicelikleri.
veter: kiriş; bir üçgenin en uzun kenarı.
veter-i ḳâime: hipotenüs.
zâviye: açı.
zâviye-i ḥadde: dar açı.
zâviye-i ḳâime: dik açı.
zâviye-i münferice: geniş açı.
ẓıll: gölge, bir yayın tanjant ya da kotanjantı.
ẓıll-ı aḳdam: ayaklık gölge, yani birim uzunluk olan yarıçap 5 veya 7 olduğunda yayların gölge (tanjant ve kotanjant) değerleri.
ẓıll-ı esâbiʿ: parmaklık gölge, yani birim uzunluk olan yarıçap 12 olduğunda yayların gölge (tanjant ve kotanjant) değerleri.
ẓıll-ı evvel: tanjant.
ẓıll-ı mabsûṭ: kotanjant
ẓıll-ı menkûs: tanjant.
ẓıll-ı sittînî: altmışlık gölge, yani birim uzunluk olan yarıçap 60 olduğunda, yayların gölge (tanjant ve kotanjant) değerleri.
ẕirâʿ: eskiden kullanılan bir uzunluk birimi.