IBN FALLÛS'UN ELEMANTER SAYI TEORİSİ ÜZERİNE OLAN BİR YAZMASINDAKİ İLK YEDİ MÜKEMMEL SAYI VE DOST SAYILARIN ÜÇ ÇEŞİTİ

SONJA BRENTJES

Türkçeye çeviren: MELEK DOSAY*

Son zamanlarda yapılan bazı araştırmalar 9. yüzyıldan itibaren elemanter sayı teorisine İslâm Dünyası bilim adamlarının yoğun bir ilgi gösterdiklerini ortaya koymaktadır.[1] Bu ilgi 8. yüzyıl sonları ile 9. yüzyıl boyunca Euclid'in "Elementler" inin tercümesi ile başladı. 9. yüzyıl başlarında Habîb ibn Bahrîz, Kindî tarafından şerhi yapılan Nicomachus of Gerasa'nın *Introductio Arithmeticae*'sinin bir Süryani nüshasını tercüme etti.[2] Yirmi, otuz yıl sonra Şâbit ibn Kurra *Introductio Arithmaticae*'nin tam metnini doğrudan doğruya Yunanca'dan Arapça'ya tercüme etti. 9. yüzyılda matematikçiler eski bilgilere zaten yeni neticeler eklemişlerdi. Elemanter sayı teorisi konusunda 9. yüzyılın en önemli incelemesi Şâbit ibn Kurra tarafından yapılmıştı. Bu eser dost sayıların, mükemmel sayıların, fazlalıklı (abundant)** ve eksikli (deficient)*** sayıların yapısını bu konulara ilişkin

* Yard. Doç. Dr., Ankara Üniversitesi, Dil ve Tarih-Coğrafya Fakültesi, Felsefe Bölümü, Bilim Tarihi Ana bilim dalı.

** Fazlalıklı sayı: Tam bölenlerinin toplamı kendisinden büyük olan sayı.

*** Eksikli sayı: Tam bölenlerinin toplamı kendisinden küçük olan sayı. Aykut Göker "abundant" sayıyı "aşırı sayı", "deficient" sayıyı "özürlü sayı" olarak tercüme ediyor. *Orta Çağda Fizik Bilimleri*, Edward Grant, çeviren: Aykut Göker, 1986, s. 13.

[1] Matvievskaya, G.P., *Uçenie o çisle na srednevekovom Bliznem i Srednem Vostoke*, Taşkent 1967; Matvievskaya, G.P., "Materialy kistorii uçenija o çisle na srednevekovom Bliznem i Srednem Vostoke", *Izistorii tocnych nauk na srednevekovom Bliznem i Srednem Vostoke, Taşkent* 1972, s. 76-169; Muzafarova, Ch. R., "Arifmetika Nikomacha v izlozenii Kutbaddina Şirazi", *Mat. i metodika ee prepod.*, c. 1, Düşenbe 1974, s. 124-131; Muzafarova, Ch. R., "Arifmetiçeskie i teoretiko-çislovye aspekty knigi VII "Nacal" Evklida v izloženii Kutbaddina Şirazi", *Issledovanija po matematike*, Düşenbe 1977, s. 79-84; Soussi, M., "Un texte d'Ibn al-Bannî sur les nombres parfaits, abondants, deficients et amiables", International Congress of Mathematical Sciences, Temmuz 14, 1975-Temmuz 20 1975, Hamdard National Foundation, Pakistan 1975; Rashed, R., "Nombres amiables, parties aliquotes et nombres figurés aux XIII ème et XIV ème siecles", *Archieve for History of Exact Sciences*, cilt 28, 1983, s. 107-147.

[2] UB Halle S., Yb 5. 4°, 1^b-54^a yapraklar; ayrıca şuna da bakınız: Steinschneider, M., *Die Hebraeischen Uebersetzungen des Mittelalters und die Juden als Dolmetscher*, Berlin 1893, cilt 2, 320, s. 517.

Antik çağın mirasından üstün bir biçimde ele almaktadır.**** İspat metodu *Elementler*'in aritmetik kitaplarına dayanmakta,metodolojisi ise zaman zaman *Introductio Arithmaticae*'ye baş vurmaktadır.[3] Bazı bilim adamları bu incelemenin muhtevasını hiç değilse 17. yüzyıla kadar taşıdılar. Orta Asya yazmalarından kısa incelemelerin gösterdiği gibi, bu ilgi 19. yüzyıla kadar devam etti.[4] Elemanter sayı teorisi konusunda yazan İslam Dünyası araştırıcılarından en iyi bilinenler arasında Beyrûnî,[5] İbn Sînâ,[6] Abû'l Vefâ,[7] Kerecî,[8] Kutbiddin Şîrazî,[9] Kâşî[10] ve Resâil İhvân es-Sefâ'nın[11] yazar veya yazarları, ve de Abû Mansûr ibn Tâhir el-Bağdâdî,[12] Kemaleddin Fârisî,[13] Abû Sakr al-Kabîsî[14] gibi başka yazarlar[15] da vardı. Bunların bazıları, me-

**** Daffâ ve Stroyls da şu makalelerinde aynı konuyu incelemekteler: *İbn Sînâ Doğumunun Bininci Yılı Armağanı*, "Ibn Sînâ as a mathematician", Ali A. Al-Daffa-John Stroyls, Ankara 1984, s. 79.

[3] Saidan, A.S., *Amicable Numbers by Thâbit ibn Qurra*. Amman (Ürdün Üniversitesi Yayını) 1977.

[4] Örneğin *Beyyân aʿdâd*'de. Rukopis'nyj fond' AN Tacikskoy SSR, Düşenbe 1213, 335ᵃ yaprak; *Mecmûʿe-ye risâlât*. Aynı yerde yazma No. 3960, *Mecmûʿa resâ'il ʿArabîya. Aynı yerde yazma* No. 4410.

[5] Al-Bîrûnî, *Kitâb at-Tefhîm liʿavvâ'il sinâʿat at-Tancîm*, ed. J. Humâ'î, Tahran 1319 H., s. 33-55; Şuna da bakınız: Abû Reyhan Beyrûnî (913-1048), "Kniga vrazumlenija naçatkam nauki o zvesdach", *Izbrannye proizvedenija* VI. Taşkent 1975, s. 38-50.

[6] İbn Sînâ, *Eş-Şifâ El fen el-sânî riyâziyât, el-hisâb"*, ed. ʿA.L. Mazhar, Kahire 1975.

[7] Abu'l-Vefâ el-Buzcânî, *Risâle fi'l-aritmetikî*, Rukopis'nyj fond' instituta vostokovedenija AN Uzbekskoj SSR, Taşkent, Ms 4750, 255ᵇ-257ᵇ yapraklar, şuna da bakınız: "Traktat Abu-l-Wafy ob osnovch opredelenijach tedretiçeskoj arifmetiki: Matvievskaya, G.P., Ch. Tllasev, *Matematiçeskie rukopisi uçenych Srednej Azii X*. XVIII vv. Taşkent 1981, s. 63-76.

[8] A. Anbouba, *L'Algebre al-Badî ʿd'Al-Karajî*, edisyon, sunuş ve notlar, Lübnan Üniversitesi yayınlarından, Matematik incelemeleri Bölümü, Beyrut 1964.

[9] Qutb ad-Dîn ash-Shîrâzî, *Durrat at-tâj lighurrat ad-Dibâj*, ed. Mashkût, S. M., Tahran 1317-1320 H.

[10] Al-Kâshî, *Miftâh al-hisab*, ed. an-Nabulsî, N., Şam 1977.

[11] *Resâil ihvân es-Safâ*, 1306 H.

[12] Abû Mansur, Abd'l-Qahir ibn Tahir Al-Bağdadî, *Al-Takmila fi'l Hisâb* (Aritmetiğin Tamamı), mesaha üzerine bir kısım ile, mukayeseli edisyonu ve şerhi A.S. Saidan tarafından yapılmıştır, Arap Yazmaları Enstitüsü Yayınlarından, Kuveyt 1985.

[13] Kamâl ad-Dîn al-Fârisî, *Tezkire el-ahbâb fi beyyân el-tahâbb*, R. Rashed, "Materiaux Pour l'Histoire de Nombres Amiables et de l'Analyse Combinatoire", *Journal for the History of Arabic Science*, cilt 6, 1982, s. 209-278, 266-229 Arapça.

[14] *Risâle el-Kabîsî fi cemʿ envâ min el-aʿdâd*, A. Anbouba, "Un Memoire d'al-Qabîşî (4e siecle H.) sur certaines sommations numeriques", *Journal for the History of Arabic Science*, cilt 6, 1982, s. 181-208, 201-187 Arapça.

[15] R. Rashed, "Nombres amiables, parties aliquetes et nombres figures aux XIIIᵉᵐᵉ et XIVᵉᵐᵉ siecles", *a.g.e.*, s. 109 dipnot ile mukayese ediniz.

selâ Abû Mansûr el-Bağdâdî ve Kemâleddin Fârisî matematik tarihçileri tarafından yeni baştan sayı teorisi çalışmaları açısından değerlendirilmelidir.[16] Burada yazması özetlenen İbn Fallûs bu grubun bir üyesi olmaktadır.

Ibn Fallûs adıyla anılan Şemseddin Abû Tâhir ibn İbrâhim ibn Gâzî ibn ᶜAli ibn Muhammed el-Hanefî el-Mârdînî 1194 ve 1252 yılları arasında yaşamıştır. Elemanter sayı teorisi[17] üzerine özet çalışması Mekke'ye bir yolculuğu sırasında yazılmıştır.[18] Yazar, Nicomachus'un *Introductio Arithmaticae*'sinin,kendisinin temel kaynağı olduğunu söylemektedir. Nicomachus'un sayıları sınıflamasında bu sayıların özelliklerinden büyük bölümünü ve felsefi temelini kabul etmekte, fakat bazı yeni sayı sınıfları ilâve etmektedir. Nicomachus'un sayısal oran ve orantılar teorisini tartışmaya girmiyor, fakat bu konuyu ayrı bir eserde ele alacağına söz vermektedir.[20] Gerçekte böyle bir eser yazıp yazmadığı belli değildir.[21] İbn Fallûs'un bu özetinde "Theologoumenates aritmetikes" anlamında sayı mistisizmine dair belirti yoktur.[22] Onun özeti İslâmi bir bağlam içinde bazı felsefi mülahazalarla karışık saf bir matematik metnidir.[23] Bu inceleme, İbn Fallûs'un tanımladığı yirmibeş çeşit sayının tertib edilmesi (oluşturulması) prensiplerinin ve matematiksel özelliklerinin tavsifine hasr edilmiştir. Mamafi bütünlük eğilimi yazarı bazı acayip problemleri ekleyerek mate-

[16] a.g.e., s. 111, 115, 122-147 ile mukayese ediniz.

[17] Şemseddin Abû Tâhir İsmâᶜil ibn İbrahim ibn Gâzî ibn ᶜAli el-Ḥanefî el-Mâridînî, *Kitâb iᶜdâd el-isrâr fî asrâr al-aᶜdâd*, Staatsbibliothek, PreuBischer Kulturbesitz, Berlin, yazma No. 5970, Lbg. 199, 15ª-31ª yapraklar; Dâr al-Kutub, Kahire, Yazma No B 23317, 3, 62ª-72ª yapraklar; yine Ayasofya, İstanbul, Yazma No 2761, 7,

[18] *a.g.e.*, yazma No. 5970, Lbg. 199, 15ᵇ yaprak, 3.

[19] *a.g.e.*, 15ᵇ yaprak, satır 11.

[20] *a.g.e.*, 15ᵇ yaprak, satır 12.

[21] Sayı teorisi incelemesi dışında İsmâᶜil ibn İbrâhîm ibn Fallûs'un dört eseri daha vardır:

— Irşâd el-Ḥussâb fî'l -meftûḥ min ᶜilm el-ḥisâb

— İnṣâb el-habr fî ḥesâb el-cebr

— Mîzân el-ᶜulüm fî taḥkîk el-maᶜlûm

— El-tafâḥa fî aᶜmâl el-mesâḥa.

Bakınız, Matvievskaya, G.P., Rosenfeld, B.A., *Matematiki i astronomy musul'manskogosrednevekov'ja i ich trudy (VIII-XVII vv)*, Moskova, 1983, cilt 2, No 359, s. 381.

[22] Sezgin'in bu konuyla ilgili varsayımına bakınız: Sezgin, F., *Geschichte des Arabischen Schrifttums*, cilt 5, Matematik, Leiden 1974, s. 165 dipnot.

[23] İsmâᶜil ibn İbrahim ibn Fallûs, *a.g.e.*, yazma No. 5970, Lbg. 199, örneğin 25ª yaprak, 15-22ª yaprak, 9.

matik sahasını terk etmeye teşvik etmiş görünmektedir. Yazarın kendisinin, formüllendirilmeleri için matematiksel kuralların bulunmadığını ifade ettiği "düşman sayılar" bunun bir örneğidir.[24] Yine bile, bu çeşit sayılar diğer araştırıcılar tarafından da nakledilmiş gibi görünmektedir, çünkü Hacı Halife *Keşf el Zunûn*'unda buna referans yapmaktadır:

'' علم الخواص ..... ومنها خواص الاعداد المتحابة والمتباغضة كما بين في تذكرة الاحباب في بيان التحاب.''[25]

"Özel hususiyetler bilimi... Bunlar arasında *Tezkire el-Ahbâb fi-beyân et-Tahâb*'da açıklandığı gibi dost ve düşman sayıların özellikleri vardır."

Hacı Halife tarafından söz konusu edilen kitap Kemâleddin Fârisî'nin aynı isimli eseri olabilir.[26] Fârisî'nin kitabında matematiksel araştırma yönünde düşman sayılara dair en küçük bir iz yoktur. Mamafi böyle bir başlığa sahip başka hiç bir eseri ben bilmiyorum.

İbn Fallûs'un metni dört kısımdan oluşur; konuyu takdim, sayılar biliminin prensipleri ve özellikleri ve sayıların sınıfları, bunların adları ve esas olarak cebir sahasında ve özellikle de ikinci derece denklemlerin çözümlerine hasr edilen 25 propozisyonun kurulması için kurallar hakkında üç bölüm. Yazar bu propozisyonlara geometrik prensipler ve genel teoremler demektedir ki, bunları giriş bölümünde matematik kitaplarına göre, üçüncü bölümde ise geometri kitaplarına göre almaktadır.[27] Bu teoremlerin yazarın cebir eseri[28] ile mukayesesi ilkin Kerecî ve Ömer Ḫayyam'ın cebir eserlerinin bu üçüncü bölüm için ana kaynaklar olduğunu akla getirmektedir. Bu bölüm $(a+b)^2$ yi çözmek için farklı değişkenleri, $(a+b)^3$ ün hesaplanmasını, başka birkaç propozisyon ve yirmialtıncı teoreme bir ek olarak binom katsayıları için $\binom{n}{k} = \frac{n-(k-1)}{k}(k^n-1)$ formülünün sözel biçimini ihtiva etmektedir.[29]

Bilinen üç yazmadan birini yazan Ahmed ibn el-Şirâzî ilk defa İbn el-Heyṣem tarafından formüle edilmiş gibi görünen ve Wilson teoremi de-

[24] *a.g.e.*, 21ª yaprak, 14-22ª yaprak, 4.
[25] Kâtib Çelebi, *Keşf el-Zunun*, Maarif Matbaası, cilt 1, Istanbul 1941, kolon 725
[26] Dipnot 13 ile karşılaştırınız.
[27] İsmâ'il ibn İbrahim ibn Fallûs, *a.g.e.*, 16ᵇ yaprak, 6 satır.
[28] *a.g.e.*, 25ᵇ yaprak, 11.
[29] *a.g.e.*, 25ᵇ yaprak, 15-26ᵇ yaprak, 3 ve 28ª yaprak, 12-28ᵇ yaprak, 4.

nilen teorem ile ilişkili bir başka problemi metne eklemiştir. Ahmed ibn, el-Şirâzi bu problemin sözel biçimde genel çözümünü vermiştir.[30]

İkinci bölümün 11. ve 13. kısımları mükemmel ve tam sayılardır. Dost sayılar üç çeşite ayrılmıştır: Niceliğe göre dost sayılar, niteliğe göre dost sayılar ve niceliğe ve niteliğe göre dost sayılar. Metinde, aşağı yukarı bütün çeşitlerden on genel örnek ihtiva eden bir çizelge bulunmaktadır. İkinci ve üçüncü çeşit dost sayıların, düşman sayıların ve tahta (board)*, tuğla (brick)** ve kuyu (well)*** sayılar denen üç boyutlu sayıların üç özel tipi için örnek yoktur.[31] Çizelge normal dost sayılardan sadece ilk 220, 284 çiftini vermektedir. Mükemmel sayılar kolonunda on örnek bulunmakta,[32] bunların yedisi mükemmel sayılar (yazarın hataları ve önemsiz hesap yanlışlarına bakmayarak): 6, 28, 496, 8128,[33] 33 550 336, 8 589 869 056,[34] 137 438 691 328. Böylece İsmâil ibn İbrâhîm İbn Fallûs'un eseri son zamanlarda bilinen, 5., 6. ve 7. mükemmel sayıların en erken ifadesini ihtiva etmektedir. Hiç değilse yarım yüzyıl sonra (1292 ve 1306 arası) Kutbeddîn Şîrâzî matematik bölümünde, 5. ve 6. mükemmel sayıların bulunduğu ansiklopedisini ortaya koymuştur.[35] İbn Fallûs'un mükemmel sayılar hesabı esas olarak Euclid'in IX. kitabının 36. teoremindeki kurala tekabül etmektedir.[36] Abû Mansûr Bağdâdî (1037)'nin *El-Tekmile fi'l-*

* Board number: a.b.c., $a \neq b \neq c$.

** Brick number: $a^2 . b$, $a < b$.

*** Well number: $a^2 . b$, $a > b$.

30 *a.g.e.*, 28^b yaprak, haşiye.

31 Örneğin bakınız: *Nicomachi Geraseni Pythagorei Introductionis Aritmeticae Libri II*, Rec. R. Hoche, Lipsiae 1913, II, 17,6.

32 İsmâʿîl ibn İbrahim ibn Fallûs, *a.g.e.*, 29^a yaprak, satır 17.

33 Yazmada 68128 dir, bunun aşikâr nedeni 1 130 816 yı izleyen sayının son rakamının iki defa yazılmış olmasıdır. 1 130 816 dan başka listede bulunan altıncı (4 096 128) ve onuncu (35 184 367 894 538) sayıları mükemmel değildir.

34 Yazmada 8 589 866 056 dır.

35 Muzafarova, Ch. R., "O Matematiçeskich Glavach Enciklopediçeskogo Proizvedenija "Durra at-tadž li gurra-at-dibadž" (Žemçužina korony dlja ukrašenija dibadža) Kutbaddina Şirazi.

Uçenie Zapiski Trudy Mechaniko-Matematiçeskogo fakul'teta, cilt 1, Düşenbe 1970, s. 85-93, 92; mamafi makale iki hata ihtiva etmektedir: İlki, beşinci mükemmel sayı 33 550 366 değil 33 550 336 dır. İkincisi, bu sayı $n = 16$ için sonuç vermez, $n = 12$ için verir. Kutbeddîn el-Şirâzi Muzafarova tarafından söz edilmeyen altıncı mükemmel sayıyı da verdiğinden, o açıkça iki mükemmel sayıyı karıştırmıştır,çünkü altıncı mükemmel sayı $n = 16$ için sonuç vermektedir.

36 İsmâʿîl ibn İbrâhîm ibn Fallûs, *a.g.e.*, 20^b-21^a yapraklar.

ḥesâb adlı kitabı mükemmel sayılar hakkında ilginç bir ifade ihtiva etmektedir. Bağdâdî on'un her kuvvetinde bir mükemmel sayı vardır şeklindeki eski çağa ait kabulü reddetmekte ve onbin ile yüzbin arasında bu tür bir sayı olmadığını bildirmektedir:

'' وقد غلط من قال : في كل عقد من العقود عدد واحد تام ، إذ ليس فيما بين عشرة آلاف ومئة ألف : عدد تام.''[37]

"O şöyle dedi: On'un her kuvvetinde bir sayının mükemmel olması yanlıştır, çünkü onbin ile yüzbin arasında mükemmel sayı yoktur."

Muhtemelen hiç değilse 5. mükemmel sayı İbn Fallûs'dan önce biliniyordu. Dost sayılara ilişkin olarak İbn Fallûs sadece ilk çeşit, yani niceliğe göre dost sayıların oluşturulması kuralını vermektedir. Bu ilk çeşit dost sayılar, diğer metinlerde geçen, yalnız ve yalnızca $G_0(a_1) = a_2$, $G_0(a_2) = a_1$ ise a_1 ve a_2 nin dost sayılar olması koşuluyla belirlenmiş alışılmış dost sayılardır, burada G_0 (n) n'nin tam bölenlerinin toplamını göstermektedir. Bu tanım yalnızca Ortaçağ İslâm Dünyası araştırıcıları tarafından kullanılmış gibi görünmektedir. Bu şu ifadeye denktir:

Eğer ve yalnızca eğer $G(a_1) = G(a_2) = a_1 + a_2$ ise a_1, a_2 dost sayılardır, burada G (n) n'nin bütün bölenlerinin toplamını göstermektedir. Bu Ṣabit ibn Ḳurra tarafından keşfedilmiş ve yukarda sözü edilen eserinin sonunda ifade edilmiştir.[38] İbn Fallûs birinci çeşit dost sayılar için kuralı aşağıdaki şekilde açıklamıştır:

'' واما النوع الثالث عشر وهو الاعداد المتحابة فهي على ثلاثة اقسام متحابة في الكمية بان يكون احد العدد ين زائدا والاخر ناقصا ويكون اجزا كل واحد منهما مساويةلكمية الاخر مثل ٢٢٠ و ٢٨٤ فان اجزا كل واحد منهما مساوية لكمية الاخر وتوليدها من الاعداد

[37] Abû Mansûr, Abd'l-Kahir İbn Tahir al-Bağdâdî, *a.g.e.*, s. 227.

[38] '' وانه اذا اخذ كل جزء لكل واحد منهما وجمع ذلك كله مما كانت ذلك مثل ذينك العددين مجموعين.''

Saidan, A.S., *a.g.e.*, s. 53.

İki (sayıdan) her birinin her (böleni) alınırsa ve (sayıların) her birinin bütün bu (bölenleri) toplanırsa, bunların toplamı bu iki sayının toplamına eşittir.

Şuna da bakınız: B.A. Rosenfeld, "Sâbit ibn Korra, Matematiçeskie traktaty", *Nauçnoe Nasledstvo*, cilt 8, Moskova 1984, s. 126.

الشطرنجية بان تجمعها فان حصل اول زد نا عليه اخرها ونقصنا منه ما قبل اخرها فيحصل اولان تضرب احدهما في الاخرثم المبلغ في اخر الاعداد يخرج اول المتحابين ثم تستخرج الثاني بزيادة احد الاولين على الاخر وتضرب المبلغ في اخر الاعداد فما حصل فهو الفضل عن المتحابين فتزيده على اول المتحابة يخرج العدد الثاني وعلى هذا توليد ها الى غير النهاية.''[39]

"Onüçüncü sınıf yani dost sayılar, üç alt sınıftan ibarettir. (Birinci çeşit) niceliğe göre dost sayılar (yani) iki sayının biri fazlalıklı ve diğeri eksiklidir. Bu iki (sayının) her birinin bölenleri (toplamı) diğer (sayı) niceliğe eşittir, 220 ve 284 gibi, çünkü bunların her birinin bölenleri (toplamı) diğerinin niceliğine eşittir. Bunlar satranç tahtası sayılarından (aşağıdaki biçimde) ortaya çıkmaktadır: Biz bunları toplarız. Eğer bir asal sayı çıkarsa, (toplanan sayıların) sonuncuyu (toplama) ekleriz ve aynı sayıdan (toplanan sayıların) sonuncusundan bir önce gelen (sayıyı) çıkarırız. (Eğer) iki asal sayı çıkarsa, bunları çarparız ve sonucu (toplanan) sayıların sonuncusu ile çarparız. Böylece iki dost (sayıdan) ilki elde edilmiş olur. Bundan sonra iki asal sayının ilki diğerine eklenerek ve sonuç (eklenen) sayıların sonuncusu ile çarpılarak ikinci dost sayı bulunur. (Çarpım) iki dost sayı arasındaki farktır. Bunu ilk dost sayıya eklersiniz ve ikinci dost sayı elde edilir. Bu şekilde sonsuz sayıda dost sayı oluşturulur."

Yukarda sözü edilen satranç tahtası sayıları çift sayıda çift sayı olarak da adlandırılır,[40] yani ikinin kuvvetleri. İbn Fallûs'un tavsif ettiği süreç şöyledir:

Eğer $\sum_{0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$ asal ise, $P_1 := \sum_{0}^{n} 2^k + 2^n$ ve $P_2 := \sum_{0}^{n} 2^k - 2^{n-1}$ dir.

Eğer P_1 ve P_2 asal ise ilk dost sayı $a_1 := P_1 \cdot P_2 \cdot 2^n$ dir. İkinci dost sayı, her iki dost sayı arasındaki $(p_1 + p_2)\ 2_n$ farkı a_1: $a_2 = (P_1 + P_2)\ 2^n + a_1$'e eklendiğinde elde edilir.

Bu kural R. Rashed'e göre,[41] ʿA.L. Maẓhar'ın neşrettiği metni düzeltildikten sonra İbn Sînâ'nın *Kitâb el-Şifâ*'sında verdiği kurala tekabül et-

[39] İsmâʿîl ibn Ibrâhîm ibn Fallûs, *a.g.e.*, 21ª yaprak, 14-21ª yaprak, 8.

[40] *a.g.e.*, 18ᵇ yaprak, 7. satır.

[41] R. Rashed, "Nombres Amiables, Parties Aliquotes et Nombres figurés aux XIIIème et XIVème siècle", *a.g.e.*, s. 116, dipnot 30ª.

mektedir.[42] Mamafi, Rashed kafasındaki tashihi açıklamamıştır. Bence, pasajın başlangıcındaki son ek humâ ikil şahıs zamirinin anlamı açıklık kazandıktan sonra metin herhangi bir aşikâr tashihe muhtaç değildir. Hiç şüphesiz İbn Sînâ $2^{n+1}-1$ in daima asal olmadığını biliyordu. Böylece, çoğul (hâ) yerine ikil (humâ)'nın kullanılması zorunludur ve bu, İbn Sînâ'nın az önceki metninde söz edilen 220, 284 örneğine işaret etmesi demektir. Bu durumda $n = 2$ dir ve bu nedenle ilk iki çift sayı 2 ve 4,1'e eklenmiştir. Sonuç bir asal sayıdır. Böylece, R. Rashed'in yorumu İbn Sînâ'nın $2^{n+1}-1$, $n = 1,2, ...,$ asal olma genel koşulunu ifade etmediği, fakat sadece P_1 ve P_2 nin asallığını ifade ettiği anlamında tadil edilmek zorundadır. İbn Sîna'nın kuralının buna ek biçimi sadece muhtevada değil, ifadesinin genel geçerliği bakımından da İbn Fallûs'un kuralı ile uyuşmaktadır, fakat İbn Fallûs kuralın ilk kısmında $n = 2$ koşuluna kısıtlamayı tekrarlamamaktadır. Eğer İbn Sînâ'nın ifadesinde tashih edilecek bir şey varsa, ikinci şahıs ikil zamirinden kaçınılmalıdır, yani ʿalaihimâ yerine ʿalaihâ veya ʿalaihi okunmalıdır.Mamafi, bu tashih metnin anlamını çok önemsiz bir biçimde etkilemektedir. İbn Sînâ şöyle yazmıştır:

'' وإذا جمعت أعداد زوج الزوج والواحد معهما فاجتمع عدد أول بشرط أن يكون اذا زيد عليهما آخرها ونقص الذى قبله كان المبلغ بعد الزيادة والمبلغ بعد النقصان أولين[43] فضرب المبلغ المزيد عليه في المبلغ المنقوص ثم ضرب ما اجتمع في آخر المجموعات حصل عدد له حبيب ، وحبيبه العدد الذى يكون من زيادة مجموع الزائد والناقض المذكورين ضربا في آخر المجموعات علي العدد الموجود أولا الذى له حبيب وهما متحابان.''[44]

"Eğer çift sayıların çift katları toplanırsa ve bunların ikisine bir (sayısı) eklenirse bir asal sayı çıkar. Eğer (toplanan çift sayıların çift katlarının) sonuncusu toplama, yani 6 + 1'e eklenirse (yani 2 + 4 + 1 ya da 7 asal sayısına) ve sondan bir önceki sayı çıkartılırsa (ve) eğer (toplam) ve (fark) iki asal sayı ise (toplamın), (farkın) ve (toplanmış) sayıların sonuncusunun

[42] Rashed şöyle yazmakta: Bu edisyonun okunması düzeltilirse İbn Sînâ'nın metni daha aydınlatıcı olur ve şöyle çevrilir:

Eğer $(2^{n+1}-1)$, P_{n-1}, P_n asal ise, $2^n P_{n-1} P_n$ ve $2^n (P_{n-1} + P_n + P_{n-1}P_n) = 2^n q_n$ dost sayılardır.

Burada onun kısaltmaları şu anlama gelmektedir:

$P_{n-1} = 3.2^{n-1} - 1$, $P_n = 3.2^n - 1$, $q_n = 9.2^{2n-1} - 1$.

a.g.e., s. 111 ve 116, dipnot 30ª ile karşılaştırınız.

[43] Burada avvalîyan şekli avvalain biçimine değişmiştir.

[44] Ibn Sînâ, *a.g.e.*, s. 28, 15-20.

çarpımı bir dost sayı verir. Bunun dostu olan sayı, toplanan (sayıların) sonuncusu ile çarpılmış olan söz konusu edilen toplam ve farkın toplamının önce bulunan dost sayıya eklenmesiyle bulunur. Bu ikisi dost (sayılar)dır."

İbn Sînâ'nın kuralının bu okunuş ve yorumlanış şekli İbn Fallûs'un $2^{n+1} - 1$ genel asallık koşulunu nasıl geliştirebilmiş olduğunu izahsız bırakmaktadır. Sabit ibn Ḳurra'nın $2^{n+1} (2^{n+1} + 2^{n-2}) - 1$ kuralının yerine $2^{n+1} - 1$'in seçilmesi için bir argümen ihtiva eden bir metin ben bilmiyorum. Mamafi bu adımı hipotetik olarak yeniden kurabilecek bazı ipuçları vardır. İlki, İbn Sînâ'nın $n = 3$ için kuralının kontrolu, P_1 ve P_2 asal sayılar olmasına rağmen a_1 ve a_2'nin dost sayılar olmadığını ve $n = 2$ durumundakinin tersine, $2^4 - 1 = 15$ in asal olmadığını göstermektedir. İkinci olarak, $n = 4$ durumuna devam etme P_1, P_2 ve $2^5 - 1 = 31$'nin asal sayı ve a_1 ve a_2'yi dost sayılar olarak verir. J. Hogendijk'in Ṣâbit ibn Ḳurra'nın dost sayılar üzerine olan eserinin inandırıcı yorumuna göre, Ṣâbit ibn Ḳurra bu dost sayı çiftini zaten biliyordu, çünkü onun genel kural için ispatı $n = 4$ durumu için ifade edilmişti.[45] Buradan, İbn Fallûs'un İbn Sînâ'nın kuralını alışılmadık bir biçimiyle aldığı sonucunu çıkarmak mümkün olabilir. Üçüncüsü, diğer yazarların eserleri Ṣâbit ibn Ḳurra'nın kuralının aynıyla nakledildiğini göstermektedir. Yine de, bilinen metinlerin büyük çoğunluğu temel olarak İbn Sînâ'yı izlemektedir.[46] İbn Fal-

[45] Hogendijk, J.P., "Thâbit ibn Qurra and the Pair of Amicable Numbers 17296, 18416", *Historia Mathematica*, cilt 12, 1985, s. 269-273.

[46] Al-Kabîṣi Ṣâbit ibn Kurra tarafından verilen biçimde Ṣâbit kuralını kullanmaktadır: Eğer $P_1 = 2^{n+1} - 1 + 2^n$, $P_2 = 2^{n+1} - 1 \text{-} 2^{n-1}$ ve $P_3 = 2^{n+1} (2^{n+1} + 2^{n-2}) - 1$ asal sayılar ise, $2^n P_1 P_2$ ve $2^n P_3$ dost sayılardır, bir cümle mevcut tek yazmada kayıp olmasına rağmen "Risâle el-Kâbîṣî fi cemᶜ envâᶜ min el-aᶜdâd", *a.g.e.*, s. 192-191 (Arapça)

Kereci cebir eseri *el-Badîᶜ*'in bir bölümünde kaynağına atıf yapmaksızın nispeten geniş bir biçimde Ṣâbit ibn Ḳurra'nın metnini özetlemektedir. Dost sayılar için Ṣâbit ibn Ḳurra'nın kuralının şu uyarlamasını kullanmaktadır:

$a_1 = P_1 P_2 2^n$, $a_2 = [(2^{n+1})^2 + 1/8 (2^{n+1})^2 - 1] 2^n$, P_1, P_2 Ṣabit ibn Ḳurra tarafından tanımlandığı şekilde asal sayılardır, ve $[(2^{n+1})^2 + 1/8 (2^{n+1})^2 - 1)]$ asal sayıdır. "L'Algebre al-Badîᶜ d'Al-Karagî", *a.g.e.*, s. 27.

Abû Mansûr el-Bağdâdî temel olarak İbn Sînâ'nın uyarlamasına benzer, P_1 ve P_2 asal sayılarının ardıl tavsifi olan kuralı sunmuştur:

— İlk adım : $2^2 + 1 = 5$ bir asal sayıdır,
$5.2 + 1 = 11$ bir asal sayıdır,

$11 - 2^2$ bir asal sayıdır, yani $2^{n+1} - 1$ in asal olup olmadığını kontrol etmektedir;

$11.5.2^2 = 220$ ilk dost sayı ve $(5 + 11) \cdot 2^2 + 220 = 284$ de ikinci dost sayıdır;

lûs'dan önce yaşamış ve dost sayılar kuralını İbn Sînâ'nınkine benzer biçimde ifade etmiş bilinen tek araştırıcı Abû Mansûr el-Bağdâdî'dir.[47]

— İkinci adım: Yeni bir çift dost sayı araştırma $2.11+1$, $2.5+1$, $2.11+1\text{-}2^3$, $2.5+1\text{-}2^3$.

Bu dört sayının asal olup olmadıklarını dener, eğer değillerse, bu adım yeni bir çift dost sayı vermez ve yeniden hesaplar:

$2P_2+1$, $2P_1+1$ ve bunların asal olup olmadıklarını dener.

$2^{n+1}-1$ ve $2^{n-1}-1$ asal sayılar koşulu kayıp. Eğer n-inci adımda $2P_2+1$ ve $2P_1+1$ asal sayılar ise ilk dost sayı $(2P_2+1)(2P_1+1)\cdot 2^n$ dir.

Abû Mansûr Abd'l-Kahir İbn Tahir el -Bağdâdî, *a.g.e.*, s. 230-231.

Al-Fârisî, Şâbit İbn Kurra'nın kuralının bir uyarlamasını tavsif etmektedir:

$q_1 = 2^n + 2^{n-1} - 1$, $q_2 = 3.2^n - 1$, $q_1q_2 = q_3$, $q_1 + q_2 + q_3 = q_4$; eğer q_1, q_2 ve q_4 asal ise 2^nq_3 ve 2^nq_4 dost sayılardır.

Bakınız: R. Rashed, "Materiaux Pour l'Historie des Nombres Amiables et de l'Analyse Combinatoire", *a.g.e.*, s. 265;'Zeyneddin el-Tanûhî (1307) Kerecî gibi aynı kuralı ifade etmektedir, mamafi metin, Sâbit ibn Kurra tarafından tanımlanan $p_2 : p_1$, p_2 için, ve Kerecî tarafından tanımlanan p_3 için koşulun genel ifadesini atlamaktadır. Eğer bu üç sayı asal ise, $2^nP_1P_2$ ve 2^nP_3 dost sayılardır. P_2'nin bulunmayışı 220,284 örneğini izleyerek çıkarılabilir. *a.g.e.*, s. 228 ile karşılaştırınız.

Muhammed Bekîr al-Yezdî aşağıdaki kuralı ifade etmektedir:

$q_1 = (3/2).2^n - 1 = 2^n + 2^{n-1} - 1$, $q_2 = 3.2^n - 1 = 2^n + 2^{n+1} - 1$, $q_3 = q_1q_2$, $q_4 = q_1 + q_2 + q_3$. Rashed tarafından telif edildiği gibi Al-Yezdî'nin genel ifadesinin bir hata içerdiğine dikkat ediniz, çünkü o, q_1'i $2^n - 1$ olarak tanımlamaktadır. Fakat q_1'i yukarıdaki örnekteki gibi vermekte. Onun genel kuralı şöyle devam etmektedir:

Eğer q_1, q_2 ve q_4 asal sayılar ise, 2^nq_3 ve $2^n(q_1 + q_2 + q_3)$ dost sayılardır. *a.g.e.*, s. 226 ile mukayese ediniz.

Ibn Haydar (ölm. 1413) Ibn al-Bannâ'nın "Telhis a'mâl el-hesâb" adlı eseri üzerine yaptığı şerhde 220,284 örneğine ilişkin kuralı vermektedir:

P_1, P_2 Şabit ibn Kurra tarafından yapıldığı gibi tanımlanmıştır, eğer bunlar asal ise, o halde $2^nP_1P_2$ aranan sayıların ilkidir. Eğer $P_3 = (2^{n+1} + 1/4.2^n).2^{n+1} - 1$ asal ise, o halde P_32^n ikinci aranan sayıdır. Bakınız; *a.g.e.*, s. 217.

M. Soussi'nin Ibn al-Bannâ'ya atfettiği, fakat Rashed'e göre muhtemelen bir şerhçi tarafından yazılmış bir eserde bu kural Sâbit ibn Kurra'nın orijinal biçiminde tekrar ortaya çıkmaktadır. Mamafi metnin yazarı yanlış olarak P_1 ve P_2 sayılarının her biri yerine 2^n nin $P_1 \cdot P_2$ çarpanının asallığını istemektedir. Bu isteği ve 220,284 ve 17296, 18416 örnekleri arasındaki çelişkiyi kendi hatasını farketmeksizin ifade etmektedir. Bakınız; M. Soussi, *a.g.e.*, s. 4-7. Soussi'nin Şâbit ibn Kurra kuralı formülleri iki yanlışlık ihtiva etmektedir (s.13):

$c = 9.2^{n-1} - 1$ yerine $c = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ olarak okur. Şâbit'in kuralı bu metinde verilen kuraldan daha basit değildir, fakat bu iki kural eşdeğerdir. Bu gerçeğe zaten Borho tarafından dikkat çekilmişti. Bakınız; W. Borho, "Befreundete Zahlen. Ein Zweitausend Jahre Altes Thema aus der Elementaren Zahlentheorie", *Lebendige Zahlen. Matematische Miniaturen*, cilt I, Basel 1981, s. 30.

Öte yandan Kutbeddin Şirazi bu kuralı İbn Fallûs gibi aynı biçimde nakleder. Bakınız; Ch. R. Muzafarova, "Arifmatika Nikomacha v Izlozenii Kutbaddina Şirazi", *a.g.e.*, s. 129.

[47] Dipnot 46 daki Al-Bağdadî'nin kuralının tavsifine bakınız.

Dördüncü olarak, Sâbit ibn Ḳurra'nın eserinin Paris nüshasından farklı olan Ayasofya nüshası başka bir ipucu vermektedir.[48] Aya Sofya yazmasında sadece P_1, P_2 ve P_3: $= 2^{n+1}(2^{n+1} + 2^{n-2}) - 1$'in değil, bir $Z = 2^{n+1} - 1$ sayısının da asal olması istenmektedir.[49] Hogendijk'in yukarda söz konusu edilen yorumuna dayanarak P_1 ve P_2 için asallık koşulunda bu şekilde Z'nin işe karışması $Z = 31$ iken $n = 4$ belirli durumunun bir yansıması olarak da açıklanabilir. Sabit ibn Ḳurra'nın P_1 ve P_2 için asallık koşulu genel duruma işaret ettiğinden,[50] Z'nin kabulü de genel bir koşul olma görünümündedir. İbn Sînâ'nın kuralını nakleden daha sonraki yazarlar Sâbit ibn Ḳurra'nm eserinin Ayasofya nüshasına dayanarak $2^{n+1} - 1$, P_1 ve P_2 için bu genel asallık koşulunu alabilirlerdi, halbuki P_3 için koşul atlanmıştı, çünkü P_3 artık kesin olarak hesaplanmıyordu. Bunlar yukarda ana hatları verilen düşüncelerle $2^{n+1} - 1$ için genel asallık koşulunu kendiliğinden insanın aklına getirmiş olabilir.

Hiç bir İslâm araştırıcısı her iki kural arasındaki ilişkileri araştırmış görünmemektedir. Bu iki kuralın ortaya koyduğu dost sayı çiftleri arasında yapılan bir mukayese her iki kuralın da $n = 2$ ve $n = 4$ için sonuç verdiğini, fakat sadece Sâbit ibn Ḳurra'nın kuralının $n = 7$ için de dost

[48] Yazma 4830, Ayasofya, İstanbul, 110ª-121ᵇ yapraklar; bakınız; A.S. Saidan, *a.g.e.*, s. 50-53.

[49] *a.g.e.*, s. 50.

[50] " فان كان كل واحد من اعداد ز ، ح ، ط (١٠) عددا اولا غير الاثنين فهو الذى نريد ، والا تجاوزنا الاعداد التي جمعت الي غيرها حتى ننتهى الى ما تكون هذه الاعداد منه اوايل (١١) .

" (١٠) في النسخة ٢ : من عد د ى ح ، ط.

(١١) في النسجة ٢ : هذان العددان من عدد ين اولين."

a.g.e., s. 50 ve 54.

Bu pasajın İngilizce uyarlaması için Hogendijk'in tercümesini kullandım. J. Hogendijk, "Thâbit ibn Qurra and the Pair of Amicable Numbers 17296, 18416", *a.g.e.*, s. 270. Mamafi Hogendijk'in Arapça metnin orijinal Z harfini yorumunu (x) işareti ile değiştirdim ve Hogendijk'in açıklamasını (...) atladım ve Saidan'ın dipnot 10 ve 11 deki sayılarını ekledim:

"Eğer Z,H,T sayılarının her biri iki sayısı dışında bir asal sayı ise, bu durum bizim istediğimizdir.Eğer değilse, kendisinden türetilecek sayıların asal olduğu belirli bir sayıya ulaşıncaya kadar sayı dizilerini açarız(111)".

"(10) yazma 2'de:... H.T sayıları

(11) yazma 2'de:... bu iki sayı asaldırlar".

Yazma 2 Paris yazmasıdır, yazma 2457, Bibliotheque Nationale, 170ᵇ-180ᵇ yapraklar; Şâbit ibn Ḳurra,'*a.g.e.*, s. 124 ile karşılaştırınız.

sayı çifti verdiğini göstermektedir. Borho'ya göre,[51] bu kural $n \geqslant 20.000$ için başka bir çift (dost sayı) vermez. $q = 2^{n+1} - 1$ ve yukarda $2^{n+1}(2^{n+1} + 2^{n-2}) - 1$ olarak verilen P_3 ile iki kural arasındaki ilişki şöyle ifade edilebilir:

$P_3 = 9/8 \cdot (q+1)^2 = 1/8.(9q^2 + 18q + 1)$.

Kaçınılmaz olarak "q asaldır" ve "P_3 asaldır" iddiaları aşağıdaki örneklerle gösterildiği gibi bağımsızdır: $n = 6$ $q = 127$ asal, $P_3 = 18.431 = 7.2633$

$n = 8$ $q = 511 = 7.73, P_3 = 294.911$ asal.

Sonsuz x değerleri için f (x) asal sayılarını veren hiç bir f ikinci derece polinomu bilinmemektedir.[52] $a_1 = 2^n P_1 P_2$ ve $a_2 = 2^n P_3$ sayılarının P_1, P_2 ve P_3 asal iken dost sayılar olması aşağıdaki sonuçları vermektedir:

— Eğer a_1 ve a_2 dost sayılar ise, $G(a_1) = G(a_2)$ olması $P_3 = (P_1 + 1)(P_2 + 1) - 1$ asal ve P_1 ve P_2 keyfi asal sayılar iken geçerlidir;

— Eğer a_1 ve a_2 dost sayılar ise ister $2^{n+1} - 1$ bir asal sayı olsun ister olmasın $G(a_1) = G(a_2)$ doğrudur, yani $2^{n+1} - 1$ için asallık koşulu dikkate alınmamıştır;

— a_1 ve a_1 dost sayılarının P_1 ve P_2 asallarının yapısı, a_1 ve a_2 dost sayıları için geçerli olmak zorunda olan $2^n P_1 P_2 + 2^n P_3 = G(2^n P_3)$ denklemine dayanmaktadır.

P_3 ve P_1, P_2 arasındaki yukarda verilen ilişkiyi kullanarak $2^n P_1 P_2 + 2^n P_3 = G(2^n P_3)$ denklemi $(P_1 + 1)(P_2 + 1)/P_1 + P_2 + 2 = 2^n$ sonucunu verir.

Eğer $a_1 = 2^n P_1 P_2$ ve $a_2 = 2^n P_3$ dost sayılar ise üç asal sayının en küçüğü 2'den büyüktür. Böylece $P_1 + 1 = 2k_1$, $P_2 + 1 = 2k_2$, $k_1 < k_2$ yazabiliriz.

$4k_1k_2/2(k_1 + k_2) = 2^n$ elde ederiz.

$k_1 = 2^{n-1-k}(2^k + 1)$ ve $k_2 = 2^{n-1}(2^k + 1)$ ve $0 < k < n$ ile üç asal sayının aşağıdaki yapısı elde edilir:

$P_1 = 2^{n-k}(2^k + 1) - 1$

$P_2 = 2^n(2^k + 1) - 1$

$P_3 = (P_1 + 1)(P_2 + 1) - 1 = 2^{2n-k}(2^k + 1)^2 - 1.$

[51] W. Borho, *a.g.e.*, s. 14.

[52] Bu bilgi için Dr. O. Neumann'a minnettarım.

Bu sonuç, yukarda verilen tipteki bütün dost sayılar için, yani $a_1 = 2^n P_1 P_2$ ve $a_2 = 2^n P_3$ tipleri için Euler kuralına eşdeğerdir. $k = 1$ için Sâbit ibn Ḳurra'nın kuralının eşdeğeri bir uyarlama elde edilir.

İbn Fallûs ikinci tür dost sayıları şöyle tavsif etmektedir:

" المتحابة في الكيفية بان يكون احد العدد ين زوجا ويكون اجزاؤه فردا ويكون الاخر فردا ويكون اجزاؤه زوجا. "[53]

"Eğer iki sayıdan biri çift ve bölenleri tek ise ve de diğeri (sayı) tek ve bölenleri çift ise bunlar niteliğe göre dost (sayılar)dır."

"Bölenleri" "bölenlerinin toplamı" olarak, yani sayının tam bölenlerinin toplamı olarak yorumlanması şartıyla bu ifade anlam doludur. Bu yorum İbn Fallûs'un eserinin ikinci bölümündeki fazlalıklı, eksikli ve niceliğe göre dost sayılar tanımlarını ifade biçimi ile doğrulanmaktadır. Burada yazar ilk bölümdeki tanımların tersine "bölenlerin toplamı" anlamında "bölenler" ifadesini kullanmaktadır.[54] Buradan, iki sayıya niteliğe göre dost sayılar denmektedir,

eğer $a_1 = 2k_1$ ve $G_0(a_1) = 2m_1 + 1$,

$a_2 = 2k_2 + 1$ ve $G_0(a_2) = 2m_2$,

$k_i, m_i \in \mathbb{N}$, $i = 1,2$ ise.

Metinde örnek verilmemiştir. Bununla beraber, sadece aşağıdaki sayıların niteliğe göre dost sayılar olduğunu göstermek kolaydır:

$a_1 : 2^n, (2k_1)^2, 2^n(2k_1)^2, 2^n(2k_1 + 1)^2$

$a_2 : (2k_2 + 1)^2$,

$n, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$.
$(2k_1)^2$ ve $2^n (2k_1)^2$, 2^n ya da $2^n (2k_1 + 1)^2$ nin özel durumlarından başka birşey değildir. $a_1 = 2^n$ aşikâr olarak koşulları sağlamaktadır.

Eğer ve yalnızca eğer $G[(2k_1 + 1)^2]$ ve $G[(2k_2 + 1)^2]$ tek ise $a_1 = 2^n (2k_1 + 1)^2$ ve $a_2 = (2k_2 + 1)^2$ bunları sağlar.

53 İsmâʿîl ibn İbrâhîm ibn Fallûs, *a.g.e.*, 21^b yaprak, 9. satır.

54 *a.g.e.*, 17^b yaprak, 1-5.

$2k + 1 = P_1^{r_1} . P_2^{r_2} .....P_t^{r_t}$ asal sayı olsun, $P_i \neq P_j \neq 2$, $\forall_{i}\, j \in \{ 1,...,t \}$.

Eğer ve sadece eğer her faktör tek ise $G [(2k + 1)^2] = \prod_{i=1}^{t} (\sum_{j=0}^{2r_i} P_i^j)$ tekdir.

Bu apaçıktır, çünkü her faktör tek terimlerin tek sayıda toplamıdır. Diğer bütün tek veya çift sayılar niteliğe göre dost sayı değildirler.

Üçüncü çeşit olan, niceliğe ve niteliğe göre dost sayılar İbn Fallûs tarafından önceki iki çeşitin özelliklerine sahip sayılar olarak tanımlanmıştır.[55]

Bu tanım şu anlama gelmektedir:

Eğer $G_0(a_1) = a_2$ ve $G_0(a_2) = a_1$ iken, a_1 çift, $G_0(a_1)$ tek ise; a_2 tek ve $G_0(a_2)$ çift ise a_1 ve a_2 ye niceliğe ve niteliğe göre dost sayılar denir. Böylece,

1. $a_1 = 2^n$, $a_2 = (2k_2 + 1)^2$ ya da

2. $a_1 = 2^n (2k_1 + 1)^2$, $a_2 = (2k_2 + 1)^2$ ve $G_0(a_1) = a_2$, $G_0(a_2) = a_1$

şeklindeki a_1, a_2 ters parite çiftleri tam olarak araştırılabilir.

İlk durum bir tarafa bırakılacak kadar basittir, çünkü Kanold s, t, n ve m_i, lerin tek olması halinde $s = p^n$, $t = q_1^{m_1} . q_2^{m_2} ... q_r^{m_r}$, $p \neq q_i \neq q_j$ sayılarının sadece dost olabileceklerini ispatlamıştır.[56] Bu ispattan ikinci durumdaki $2k_2 + 1$'in bir asal sayının bir kuvveti olamayacağı tesadüfen çıkmaktadır. Buradan, ters pariteye sahip bir sayı çifti sadece eğer $a_1 = 2^n(2k_1 + 1)^2$, $a_2 = (2k_2 + 1)^2$ ve $2k_2 + 1$ bir asal sayının bir kuvveti değilse dost olabilir (bu formüllendirme Ibn Fallûs'un niceliğe ve niteliğe göre dost sayılarına eşdeğerdir).[57]

[55] *a.g.e.*, 21^b varak, 10-12.

[56] H.-J. Kanold, "Über Befreundete Zahlen", *Mathematische Nachrichten*, cilt 9, 1953, s. 243-248.

[57] Yazmayı incelemeyi bitirdikten sonra H.-J. Kanold'un adı geçen eserini ve A.A. Goia ve A.M. Vaidya'nın *American Mathematical Monthly*'nin cilt 8, 74. sayısında s. 969-973 de çıkan "Amicable Numbers with Opposite Parity" adlı yazısını ve de Lee tarafından zikr edilen J.S. Madachy'nin *Journal of Recreational Mathematics* 5,2,1972, s. 77-93'de çıkan "The History and Discovery of Amicable Numbers" adlı makalesini okudum. Lee ve Madachy'nin incelemeleri bu makalede farklı pariteli dost sayıların yapısı hakkındaki düşünceler için temel olma hizmetini görmüştür. Gioia ve Vaidya'nın eseri de farklı pariteli dost sayı çiftlerinin sadece $2^n(2k_1 + 1)^2$ $(2k_2 + 1)^2$, $2k_2 + 1$ yapısına sahip olabildiklerini göster-

Zamanımıza kadar böyle bir çift bilinmemektedir,[58] fakat zorunlu koşullar ve alt sınırlar ortaya konmuştur:

$a_1 = 2^n (2k_1 + 1)^2$ ve $a_2 = (2k_2 + 1)^2$ dost sayılar olsun.

Şu aşağıdakiler geçerlidir:

1. a_1 bir tam sayının ne dördüncü bir kuvvetidir ne de dördüncü kuvvetinin dört ya da sekiz katıdır.

2. $2k_1 + 1$ bir kare değildir.

3. Eğer $n = 1$ ise, $a_2 < a_1$, $(a_1, a_2) = 1$ olur; a_2 hiç değilse beş farklı asal faktöre sahiptir, $a_1 a_2 \equiv 2 \pmod{24}$. $a_2 > 10^{60}$

4. Eğer $n > 1$ ise, $a_1 < a_2$, $(a_1, a_2) > 1$ dir.

5. Eğer $n > 1$ tek ise, $(2k_1 + 1, 3) = (2k_2 + 1, 3)$, ve bir q asal sayısı olur. $m \in IN$, $q^m | 2k_2 + 1$ ve $q^{m+1} \nmid 2k_2 + 1$ ve $q \equiv m \equiv 1 \pmod 3$. Eğer $m \equiv 3 \pmod 4$ ise, q dan farklı olması zorunlu olmayan bir p asal sayısı mevcut olur, ve $l \in IN$, $p^l | 2k_2 + 1$ ve $p^{l+1} \nmid 2k_2 + 1$ ve $2p \equiv l \equiv 2 \pmod 5$ ve $2k_1 + 1 \equiv 2k_2 + 1 \equiv 1/4\,(n+1)\,G\,[(2k_1 + 1)^2\,] \equiv 0 \pmod 5$.

6. Eğer $2k_1 + 1 = p^s$ ise, $n = 1, s > 6$, $p \equiv 1 \pmod{12}$, a_2'nin farklı asal faktörlerinin sayısı 24'den büyüktür ve $a_2 > 10^{75}$, dir.[59]

Yirminci yüzyıl matematikçileri tarafından elde edilen bu sonuçlar, üçüncü çeşit dost sayıları bulma probleminin ortaçağ matematikçileri tarafından çözülemediğini göstermektedir. Böylece, bu problem muhtemelen matematiksel bir bağlamdan doğmamıştır. Bu problemi ihtiva eden başka bir metin bilinmediğinden, bunun menşei veya başkaları üzerinde etkisi hakkında son bir cevap bu dönemde verilememiştir. Mamafi, Ismâil ibn Ibrâhîm ibn Fallûs'un açıklama tarzı bunun muhtemel menşeine felsefî bir zeminde işaret etmektedir.

---

mektedir. $2k_1 + 1$ yapısı üzerine daha başka önermeler de ortaya konmuştur. Kanıt, $2k_2 + 1$ yapısına ilişkin daha keskin bir sonuç veren Kanold'un makalesinden bağımsızdır. Gioia'nın ve Vaidya'nın makalesinin dost sayıların tanımının doğru olmayan bir ifadesini işlediğine dikkat ediniz. Onlar, bir sayının bütün pozitif bölenlerinin toplamının diğer sayıya eşit olmasını istemekteler (s.69).

[58] E.J. Lee, J.S. Madachy, *a.g.e.*, s. 84'e göre $a_1 = 2^n M^2$, $a_2 = N^2$ formülü, M, N tek sayıları ilk defa O. Gmelin tarafından verilmişti (*Über Vollkommene und Befreundete Zahlen*, Diss., Heidelberg 1917, Halle/S., 1917) fakat bir gerçek olarak bunun en erken ortaya çıkışı H.-J. Kanold'dadır ("Über Befreundete Zahlen, II", *Mathematische Nachrichten*, cilt 10, 1953, s. 99-111).

[59] *a.g.e.*, s. 99-111; E.J. Lee, J.S. Madachy, *a.g.e.*, s. 84.

TEŞEKKÜR

Dâr el-Kutub, Kahire, yazma B 23317,3 deki yazmayı elde etme imkânını bana sağlayan Prof. D. King'e (Frankfurt a.M.) ve makalemin İngilizce tercümesine ilişkin yardımları için Dr. J. Hogendijk'e (Utrecht) müteşekkirim.

Dr. Sonja Brentjes