ONALTINCI YÜZYIL TRİGONOMETRİ ÇALIŞMALARI ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA, COPERNİCUS VE TAKİYÜDDÎN

SEVİM TEKELİ *

Trigonometri, başka deyimle "üçgenlerin ölçümü" üzerindeki çalışmalar çok eskilere, Mısır ve Mezopotamyalılara kadar gider.

Yunanda Pitaneli Autolycos [1] (Milattan önce dördüncü yüzyıl), Samoslu Aristarkos [2] (Milattan önce üçüncü yüzyıl), Hiparchos [3] (Milattan önce ikinci yüzyıl), İskenderiyeli Heron (Milattan sonra birinci yüz yıl) trigonometrinin öncüleri olarak söz konusu edilir. İskenderiyeli Menalaos'un *Spherica* adlı yapıtı küresel trigonometriye ilişkin ilk çalışmadır. Batlamyüs'a (Milattan sonra ikinci yüzyıl) gelince, o da Hiparchos gibi kirişleri kullanmış ve kirişler cetvelini çok mükemmel bir hale getirmiştir.

Batı Dünyasında gerileme başladığında Hintliler *Siddhânta*ları ortaya koydular. Kuşkusuz bu yapıtlar Yunanlıların çalışmalarına dayanıyordu. Surya'nın (dördüncü yüzyıl) *Surya Siddhânta*sı tam olarak zamanımıza kadar gelmiş olanıdır. Bu yapıtların en önemli katkıları, kirişler yerine sinüs ve sekantın kullanılmış olmasıdır. *Paulisa Siddhânta* trigonometri tarihi açısından *Surya Siddhânta* kadar önemlidir. [4]

* Prof. Dr. Sevim Tekeli, Ankara Üniversitesi Dil ve Tarih - Coğrafya Fakültesi Felsefe Bölümü ve Bilim Tarihi Anabilim Dalı Başkanı.

[1] George Sarton, *Introduction to the History of Science*, Washington 1927, cilt I, s. 140-142.

[2] Ay ve Güneşin uzaklıkları ve büyüklükleri üzerindeki çalışmalarıyla gerçek anlamda trigonometrik çalışmaları başlatan kimsedir. David Eugene Smith, *History of Mathematics*, New York 1958. cilt 2 s. 604.

[3] O kirişlerin hesabı üzerine 12 kitap kaleme almıştır, ancak bunların hiç biri zamanımıza ulaşmamıştır. Daireyi ilk olarak 360° bölmüş, yarı çap 60^p olarak bir kirişler cetveli hazırlamıştır. Sarton, s. 193-194.

[4] *Siddhânta*lar Hintlilerin astronomi ve trigonometriye ilişkin en önemli yapıtlarıdır. 6 tane Siddhânta vardır, *Sûrya - Siddhânta*, *Paitâmaha - Siddhânta*, *Vâsishtha –Siddhânta*, *Paulisa– Siddhânta*, *Romaka - Siddhânta*. En yaygın olanı *Sûrya - Sid-*

Daha sonra, İslâm Dünyasında, çağının en ünlü astronom ve matematikçisi El-Battânî el-Şabiî (858–929) son derece açık ve seçik ve de bilinçli olarak, Yunanlıların kullandıkları kirişlere göre çok daha üstün olan sinüsleri ve kosinüsleri kullanmış, ayrıca tanjant, kotanjant, sekant ve kosekantı da bilim Dünyasına sunmuştur. Tanjant üzerine çalışma yaparak bir tanjant cetveli hazırlamıştır.[5]

Onüçüncü yüzyılda Naşîrüddîn-i Ṭûsî de *Şekl el Kattâ'* adlı kitabını yazarak trigonometriyi bağımsız bir bilim dalı haline getirmiştir.[6] Bu gün sinüs teoremi diye bilinen bağıntıya her nekadar daha önce Beyrûnî (onbirinci yüzyıl) ve Ebû'l-Vefâ (940–998) tarafından da işaret edilmiş ise de, ilk olarak açık bir biçimde formüle eden o olmuştur.[7]

Müslüman bilim adamları, Beyrûnî[8] ve Ebû'l-Vefâ[9] gibi, sin 1°nin hesabında yeni yöntemler geliştirmişlerdir. Ancak onbeşinci yüzyılda Uluğ Bey ve Gıyasüddîn el-Kâşî orijinal bir yöntemle, başka deyimle, üçüncü derece denklemi oluşturarak bu problemi çözümlemişlerdir. Kadı-zâde-i Rûmî[10] de bu konu ile uğraşmıştır, ancak yöntemi

---

*dhânta*dır. Bunların en ilginç yanı kirişler yerine *iyâ* yı kullanmış olmalarıdır (Sarton, cilt I s. 386). Ancak bu bir açının iki katının kirişinin yarısı olarak kullanılmıştır (Smith, s. 608). Bu sinüs anlamına gelmekle beraber, bu bugünkü biçiminde kullanılmamış olması nedeniyle diğer trigonometrik fonksiyonların çıkartılmasına olanak sağlamaz.

[5] 858 yılında Harran'da doğduğu sanılıyor. Rakka'da yaşamış, ve 929'da Samarra'da ölmüştür. Pek çok yapıtı vardır. Bunların en önemlisi olan *Zic*'i onikinci yüzyılda Chesterli Robert ve Tivolili Plato tarafından Latinceye ve bir yüzyıl sonra da Alphonso'un emriyle İspanyolcaya çevrilmiştir. Plato'nun çevirisi 1537 de Nürenberg'de *De motu stellarum* adıyla basılmıştır. Batıda Albategnius adıyla tanınan bu büyük astronom ve matematikçinin Rönasansa etkisi çok büyük olmuştur. Sarton, s. 602-603.

[6] Smith, s. 609.

[7] Smith, s. 630.

[8] Beyrûnî *Kanûn el-Mes'ûdî* de kiriş 1° yi kiriş 3° den çıkartma yolunu izlemiştir. Bu yöntem bir açının üçe bölünmesi yöntemine dayanmaktadır. Carl Schoy, Beiträge zur arabischen Trigonometrie. (*Gustaf Eneström'ün 70'inci doğum yıldönümü armağanı*). s. 365-399.

[9] Ebû'l-Vefâ'nın sin 1° nin bulunmasına ilişkin yöntemi Salih Zeki tarafından *Âsâr-ı Bakiye*de (İstanbul 1329 H.) ayrıntılı bir biçimde açıklanmıştır, s. 106-120.

[10] Salih Zeki, s. 133-139

öncekilerden farklı değildir. İspanya çevresinde Zarkâlî [11] (onbirinci yüzyıl) trigonometrik cetvelleriyle Câbir ibn Aflâḥ (onikinci yüzyıl) [12] küresel üçgenler üzerindeki çalışmalarıyla söz konusu edilmesi gereken bilim adamlarıdır.

Batı Dünyasına gelince: Onüçüncü yüzyılda yaşayan Fibonacci'nin *Practica Geometriae* yapıtı, İslâm Dünyası trigonometri çalışmalarından haberdar olduğunu göstermektedir. [13] Ondördüncü yüzyıl İngiliz bilim adamlarından Maudith [14], Richard Wallingford [15] ve Jean de Linieres [16] İslâm Dünyası çalışmalarından etkilenmiş iseler de bu çalışmaları tam olarak tanıyan ve Batı Dünyasına tanıtan Peurbach (1423–1461) ve Regiomontanus (1436–1475)'dur. Regiomontanus *De triangulis Omnimodis Libri V* (1464 yılında yazılmış ve ilk defa Nurnberg'de 1533'de basılmıştır) adlı yapıtıyla, trigonometriyi astronomiden ayrı, bağımsız bir bilim dalı haline getirmiştir. Yeni trigonometrik cetveller hazırlamış, düzlem ve küresel trigonometrinin temellerini atmıştır. A. von Braunmühl'e Nassîr Eddîn Tûsi und Regiomontan (*Abhandlungen der Kaiserlich Leopoldinisch - Carolinischen Akademie der Naturforscher LXXI, 1897*) yapıtından dolayı müteşekkir olmak gerekir. Bu yapıtta Braunmühl Ṭûsî ile Regiomontanus arasındaki benzerliği çok açık bir biçimde göstermiş ve Regiomontanus'un Ṭûsî'den ne büyük ölçüde yararlanmış olduğunu gözler önüne sermiştir. [17]

David Eugene Smith'in *History of Mathematics*'de (cilt II) söylediği gibi, onaltıncı yüzyılda Copernicus Regiomontanus'un yarım bıraktığı çalışmaları ünlü yapıtı *De Revolutionibus Orbium Coelestium*'da tamamlamıştır. Bunun trigonometriye ilişkin bölümü *De*

[11] Smith, s. 609.

[12] Smith, s. 609.

[13] Smith, s. 609.

[14] 1310 yılları dolaylarında yaşamıştır. Batıda trigonometrinin kurucuları arasında yer alır. Sarton, cilt 3. kısım 1, s. 660-661.

[15] 1292-1335 yılları arasında yaşamıştır. Hiristiyan Dünyasında trigonometriyi tanıtanlardandır. En önemli yapıtı *Quadripartium* dur. Yunan ve İslâm Dünyası çalışmalarına dayanarak hazırlanmış ilk Latince telif kitaplardan biridir. (El-Zarkâlî ve El-Battanî). Sarton cilt 3, kısım 665-668.

[16] *Canones tabularum astronomie* adlı yapıtı trigonometriye ilişkindir. Her yarım derece için bir sinüs cetveli ile her derece için bir tanjant cetveli hazırlamıştır. Bu cetveller İslam Dünyası kaynaklıdır. Sarton, cilt 3, kısım 1. 649-657.

[17] Smith, s. 609-610.

Lateribus et Angulis Triangu adıyla Rhaeticus (1514–1574) tarafından yayınlanmıştır. [18]

İslâm Dünyasına, daha doğrusu onun temsilcisi Osmanlı İmparatorluğuna gelince: ne onaltıncı yüzyılda ne de onu izleyen yüzyıllarda trigonometri tarihine ilişkin hiç bir bilgiye sahip değiliz.

İşte bu çalışmalarımızın amacı, sınırlı da olsa, bir noktaya ışık tutmak, 16. yüzyıl trigonometrisine ilişkin ip uçları verebilmektir. Bunun için, ünlü astronom, matematikçi, İstanbul Rasathanesinin kurucusu Takiyyüddîn'in [19] *Sidret ül-Müntehâ* [20] adlı zîcinin trigonometriye ilişkin bölümünü sergileyeceğiz.

Takiyyüddîn'in onaltıncı yüzyıl Dünya trigonometrisi karşısında ne yaptığını sergilemenin en kısa ve en güvenilir yolu, Smith'in de belirttiği gibi, 16. yüzyıl Batı Dünyası trigonometri çalışmalarının en belirgin örneğini oluşturan Copernicus'un *De Revolutionibus Orbium Coelestium*'un *De Lateribus et Angulis Triangulerum*'u ile *Sidret ül-Müntehâ*'nın trigonometriye ilişkin 1. Bölümünün karşılaştırmasını yapmaktadır.

Karşılaştırmaya Copernicus'un Charles Glenn Wallis tarafından yapılmış İngilizce çeviri (Nicolaus Copernicus, *On the Revolutions of the Heavenly Spheres.* The Great books of the Western World. cilt 16, s. 601-858) ile 1960 yılında Doçentlik tezi olarak sunmuş olduğum *Onaltıncı yüzyıl Astronomisi ve Takiyyüddîn*'in *Sidret ül-Müntehâ Adlı Eseri*'nde dört nüshanın karşılaştırılmasıyla hazırlanmış olan kritik metin ve Türkçe çeviri esas olarak alınmıştır.

Kirişler üzerindeki çalışmaları:

Copernicus kitap 1, bölüm 12'de ve Takiyyüddîn kitab 1, bölüm 1'de dairedeki kirişlerden söz ederler. Copernicus daireyi 360°, çapı 200000, Takiyyüddîn ise daireyi 360°, çapı 120^p veya 2 olarak almışlardır. Daha önce Batı Dünyasında Peurbach yarı çapı 6000000

[18] Smith, s. 610.

[19] 1526 yılında Kahire'de doğmuş, orada öğrenim görmüş, 1575 yılında İstanbul'da Galata'da 16. yüzyılın en önemli rasathanelerinden birini kurmuştur. Sevim Tekeli, "Nasirüddîn, Takiyüddîn ve Tycho Brahe'nin Rasat Aletlerinin Mukayesesi". *A.Ü. Dil ve Tarih - Coğrafya Fakültesi Dergisi.* cilt 16, sayı 3-4 (1958) s. 301-393.

[20] Basılmadığı için bir nushayı esas aldık.

Regiomontanus ise 10000000 olarak almışlardı[21]. Yarı çapın 1 olarak kabul edilişi ise Bürgi (1552–1632) ile başlar.[22] Yarı çapın birim olarak düşünülmesi ondalı kesirlerin ortaya çıkışını çabuklaştırmıştır. İslâm Dünyasında ise çapın 2 olarak alınmasına Ebû'l-Vefâ'da rastlanmaktadır.[23] Görüldüğü gibi bu, Takiyyüddîn ile Copernicus arasında önemli bir farkı vurgulamaktadır.

Her ikisi de kirişler cetveli hazırlamak için Batlamyüs'ten beri bilinen kiriş (180°–A), kirişler teoremi (Batlamyüs teoremi), kiriş (A–B), kiriş (A + B) ve kiriş A/2 formüllerini çıkarmışlardır. Buraya kadar Copernicus ile Takiyyüddîn arasında tam bir paralelizm vardır.

Kiriş 1° veya 2°nin hesabına gelince, Copernicus bunu açı küçüldükçe yayla kiriş arasındaki farkın çok küçüleceğini, hatta açı daha da küçülünce hiç kalmayacağını kanıtlayarak yapmıştır[24].

Takiyyüddîn ise bu konuya ilişkin şöyle demektedir. "Eskiler kiriş 2°nin hesabını sağlayamayınca, yaklaşık ve anlatılmasına deymeyen yöntemler kullandılar. Merhum Sultan Uluğ Bey'e gelince, o, 'Bir derecenin sinüsünü elde etmek hususunda bize ilham geldi' demiş ve bu konuya ilişkin çok değerli bir makale kaleme almıştır. Onda matematik kurallara bağlı geometrik kanıtlamalarla, bir derecenin sinüsü ve iki derecenin kirişinin üç yolla çıkarılışını açıklamıştır. Onlardan biri hilesini ortadan kaldırmaksızın bizim yaptığımız kısaltmalarla şöyledir."[25]

Bu yöntemin esası

$ax-b = x^3$ $x =$ kiriş $2°$ veya $x = \sin 1°$ olmak üzere bir üçüncü derece denklemini oluşturmaktır. Ancak bu yüzyılda üçüncü derece denkleminin henüz çözümü bilinmediğinden sin 1° veya kiriş 2° tam olarak hasaplanamamıştır. Yine de trigonometri tarihi açısından son derece önemli bir aşamayı vurgulamaktadır.[26]

[21] J.D. Bond, "The Devolopment of Trigonometrical Methods down to the Close of the Fifteenth Century", *Isis*, cilt 4, 1922, s. 304.

[22] Smith, s. 627.

[23] Bond, s. 302,

[24] Copernicus, s. 537.

[25] Sevim Tekeli, Takiyüddîn'de Kiriş 2° ve Sin 1°nin Hesabı, "*Araştırma*, cilt 3, (1965), s. 124-125,

[26] Smith, s. 626.

Sinüsler üzerindeki çalışmalar:

Sinüsler: Copernicus kirişlere ilişkin bölümün sonunda, sinüs deyimini kullanmaksızın, "Bir açının iki katının kirişinin yarısını vermenin yeter olduğunu düşünüyorum, çünkü genellikle kirişin yarısı daha çok kullanılmaktadır. Bu nedenle kirişlerin yarılarını veren her 1/6° için bir kirişler cetveli hazırladım." [27] demektedir. Copernicus'un sinüslere ilişkin söylediği bundan ibarettir.

Takiyyüddîn'de kitap 1, bölüm 2 sinüsler üzerinedir. O bu bölümde sinüs, kosinüs, sekant, ve kosekantın tanımını vermiş, sin (A–B), sin (A + B), sin A/2 nin formüllerini çıkarmış [28], sin 1°nin hesabını yapmıştır. [29]

Görüldüğü gibi Copernicus'un sinüs deyimini kullanmaksızın, yalnızca bir açının iki katının kirişinin yarısının daha çok kullanıldığına deyinmesine karşılık, Takiyyüddîn'in sinüs, kosinüs, sekant, kosekant üzerine söylenebilecek herşeyi söylemiş olduğuna tanık oluyoruz. Hernekadar bir açının iki katının kirişinin yarısı o açının sinüsüne eşit ise de, sinüsü bu biçimde tanımlama kosinüs ve sekant gibi trigonometrik fonksiyonların ele alınmasına olanak sağlamadığından trigonometri tarihi açısından önemli değildir, bir aşama olarak gösterilmemektedir. [30]

Düzlem üçgenleri üzerinde yapılan çalışmalar:

Copernicus'ta kirişleri izleyen bölüm 13, düzlem üçgenleri üzerinedir. O bu bölümde üçgenlerin bilinirliği üzerinde durmaktadır.

1. Kenarları verilen bir üçgenin,
2. İki kenar ve bir açısı verilen bir üçgenin (dar, dik ve geniş açılı olabilir)
3. Bir kenar ve iki açısı verilen bir üçgenin diğer ögelerinin de bulunabileceğinin kanıtlanmasını yapar.

Takiyyüddîn ise kitap 1, bölüm 1'de düzlem kesenleri ve düzlem üçgenleri üzerinde durur. Menelaos teoreminin çeşitli oranlarını açıkladıktan sonra, düzlem üçgenlerini ele alır. Burada her hangi bir üçgende kenar açı bağıntısını, yani sinüs teoremini sunar.

$$\sin A/a = \sin B/b = \sin C/c$$

[27] Copernicus, s. 538.
[28] Smith, s. 617.
[29] Tekeli, *Araştırma*, cilt 3, s. 126-127.
[30] Tekeli, *Aynı yer.*

ve kanıtlamasını yapar. Bu teorem üçgenlerin bilinmeyen ögelerinin hesaplanmasında, bu gün bile en çok baş vurulan bir bağıntıdır. Bilindiği gibi kenar açı bağıntıları ilk önceleri yalnızca dik açılı üçgenler için söz konusuydu. Her hangi bir üçgende bu bağıntıya Beyrûnî ve Ebû'l-Vefâ işaret etmişler, Naṣîrüddîn-î Ṭûsî de bunu açık olarak ele almış ve kanıtlamıştır.[31]

Görüldüğü gibi Copernicus'un düzlem üçgenlerinin bilinmeyen ögelerinin hesabına ilişkin verdiği bilgiler Yunan Çağından beri bilinenlerin bir tekrarıdır.

Takiyyüddîn'e gelince, o bu gün bile kullanılan, ancak yüzyıllar önce İslâm Dünyasında uygulamaya konulan sinüs teoremini, düzlem üçgenlerinin bilinmeyen ögelerinin hesabında kullanmıştır. Trigonometri tarihi açısından bu farkın küçümsenemeyeceğini de hemen vurgulamak gerekmektedir.

Küresel üçgenler üzerindeki çalışmalar:

Copernicus'ta bölüm 14, küresel üçgenler üzerinedir.[32] O ilk önce bir küresel üçgenin koşullarını belirler (Kenarlar büyük daire yayından oluşacak ve 180° den küçük olacak).

Dik açılı bir küresel üçgende

1/2 kiriş 2 AB/1/2 kiriş 2 BC = yav çap/1/2kiriş C bağıntısını verir.

yani sin AB/sin BC = yarı çap/sin C

Ayrıca bir küresel üçgende,

1. İki kenar ve bir açı,
2. İki açı ve bir kenar,
3. Üç kenar,
4. Üç açı verilmiş ise bu üçgenin diğer ögelerinin de hesaplanabileceğini kanıtlar.

Bunu iki küresel üçgenin eşitliğinin koşulları izler.

1. Dik açılı iki üçgenin birer kenarları ve ona komşu olan açısı,
2. Her hangi iki üçgenin birer kenarları ve ona komşu olan iki açısı,
3. Her hangi iki üçgenin iki kenar ve birer açıları,
4. İki üçgenin kenarları,

[31] Smith, s. 630.
[32] Copernicus, s. 545-556.

5. İki açı birer kenarları eşit ise bu küresel üçgenlerin eşit olduğunu kanıtlar.

Takiyüddîn'de ise bölüm 5 ve bölüm 6 küresel kesenler, küresel üçgenler ve tanjant teoremleri üzerinedir.

Bölüm 5'in başında küresel kesenlere ilişkin bağıntıları verir. Onu Copernicus'da olduğu gibi küresel üçgeni oluşturma koşulları (Kenarlar büyük daire yaylarından meydana gelecek ve 180° den küçük olacak) ve bir dik üçgende kenar açı bağıntısı izler.

$$\sin AB / \sin AC = \sin 90° / \sin C$$

Bilindiği gibi bu bağıntıya işaret eden Ebû Naṣr ibn 'Irâḳ' dır, ve buna *Mugnî* adını vermiştir [33].

Bu bölümde Takiyyüddîn, daha sonra, Ebû Naṣr ibn 'Irâḳ'ın *Mugnî*den çıkarılan üç sonucu üzerinde durur.

1. Sonuç	$\cos RY / \cos BR = \sin 90° / \cos BY$	RBY üçgeninde
2. Sonuç	$\cos B / \cos YR = \sin R / \sin 90°$	RBY üçgeninde
3. Sonuç	$\sin RY / \sin BY = \sin CH$	İki üçgende (Yani eşit açıların karşılarındaki kenarların sinüslerinin orantılı olması)

Bölüm 6 da ise her hangi bir üçgende

$$\sin AB / \sin BA = \sin C / \sin A$$

yani sinüs bağıntısını verir [34]. Bugün üçgenlerin bilinmeyen ögelerinin hesabında en çok baş vurulan bu bağıntıdan Copernicus'un söz etmediğini görmekteyiz.

Ayrıca Copernicus'un paralelinde bir küresel üçgende,

1. İki kenar ve aralarındaki açı,
2. İki kenar ve iki kenardan birini gören açı,
3. İki açı ve aralarındaki kenar verilmiş ise bu üçgenin diğer ögelerinin de bulunabileceğini kanıtlar. Copernicus ve Takiyyüddîn'in kullandığı yöntemler birbirlerinin aynıdır.

Görüldüğü gibi *Mugnî*nin üç sonucu ve sinüs teoremini kullanan Takiyyüddîn ile bunlardan söz etmeyen, başka deyimle haberdar

[33] Ebû Naṣr Manṣûr ibn Ali ibn Irak. Beyrûnî'nin hocasıdır. Menelaos'un *Spherica* adlı yaptını çevirmiş ve düzeltmiştir. Trigonometri ve astronomiye ilişkin bir takım yazılar ona atfedilmektedir. Sarton, cilt 1, s. 668.

[34] Smith, s. 630.

olmayan Copernicus arasındaki fark bir nicelik değil bir nitelik farkıdır.

Takiyyüddîn'in tanjant ve kotanjant üzerindeki çalışmaları:

Copernicus'un trigonometriye ilişkin verdiği bilgiler küresel üçgenlerle son bulmaktadır. Takiyyüddîn'e gelince kitap 1, bölüm 6'nın ilk kısmında tanjant, kotanjantı tanımlamış, özelliklerinden söz etmiş ve onlardan çıkartılan sonuçlar üzerinde durmuştur.

Tanjant ve kotanjanta ilişkin şu orantıları vermiştir.

tgA/sinA = yarıçap/cosA [35]

tgA.cotA = yarıçap^2 yarıçap = 1 alınırsa tgA.cotA = 1 olur.

Ayrıca tgA/tgBC = sinA/sinAB yani tanjant teoremini, ABC küresel üçgeni için kanıtlamış ve ilk önce Ebû'l-Vefâ el-Buzcani tarafından uygulandığını belirtmiştir.

Tanjant teoreminden çıkartılan üç sonucun kanıtını vermiştir. Bunlar sırasıyla,

1. sonuç	cosB/sin90° = cotBR/cotBY	BRY üçgeninde
2. sonuç	cosBR/sin90° = cotB/tgR	BRY üçgeninde
3. sonuç	sinRY/tgYB = RH/tgHC	BHCR keseninde

Görüldüğü gibi Takiyyüddîn tanjant, kotanjanta ilişkin pek çok bilgiyi sergilemiş, Copernicus ise bu trigonometrik fonksiyonlardan söz etmek bir yana tanjant ve kotanjanta hiç değinmemiştir.

[35] Ebûl'-Vefâ bu formülü biliyordu. Smith, s. 623.

BİR DAİRE İÇİNDEKİ KİRİŞLER ÜZERİNE

Copernicus
Kitab 1, Bölüm 12

Bir daire 360° bölünmüş ve çap 200000 olarak kabul edilmiştir.

Teorem I. Bir daire içine çizilmiş dörtgen, altıgen, ongenin, başka deyimle kiriş 90°, kiriş 60°, kiriş 36°nin bulunması (s. 532–533).

A açısı verilmiş ise kiriş (180°–A) nın bulunması (S. 533-534).

Teorem II. Batlamyüs teoremi ve kanıtlanması (S. 534).

Teorem III. Kiriş (A-B) nin formülünün çıkarılması (S. 534-535).

Teorem V. Kiriş A verilmiş ise A/2 nin hesabı (s. 535).

Teorem V. Kiriş (A + B) nin formülünün çıkarılışı (S. 535-536).

Teorem VI. yay BC/yayAB >kiriş BC/kiriş AB (s. 536).

Problem. Mademki aynı açıyı gören kiriş, aynı açıyı gören yaydan daha küçüktür, ve bu fark açı küçüldükçe azalmaktadır, sonunda kiriş daireye teget olmakta ve teget olmadan önceki durumda bu fark çok küçülmektedir. Örneğin

yay AB = 3° olduğunda
kiriş AB = 5235^p dir.
(çap = $200,000^p$)
yay AC = 1 1°/2 olduğunda
kiriş AC = 2618^p dir.

Bilindiği gibi yay AB = 2 yay AC ve yay AB < 2 kiriş AC

Takiyyüddin
Kitab 1, Bölüm 1, Kısım 1

Bir daire 360° bölünmüş, çap 120^p veya 2^p olarak kabul edilmiştir.

Teorem I. II. III. IV, V. Bir daire içine çizilmiş dörtgen, altıgen, ongenin, başka deyimle kiriş 90°, kiriş 60°, kiriş 36° nin bulunması (7b-8a).

A açısı verilmiş ise kiriş (180°-A) nın bulunması (8b)

Teorem VI. Batlamyüs teoremi ve kanıtlanması (8b, 9a).

Teorem VII. Kiriş (A-B) nin formülünün çıkarılması (9a).

Teorem VIII. Kiriş A verilmiş ise A/2 nin hesabı (9a).

Teorem IX. Kiriş (A + B) nin formülünün çıkarılışı (9b).

Teorem I. yay BC/yay AB > kiriş BC/kiriş AB (7b).

Kiriş 1° nin hesabı. "Her nekadar bu kurallar, yani kiriş (180°-A), kiriş (A-B), kiriş (A + B), kiriş 2A sağlam bir biçimde ortaya konunca, pek çok yayın kirişini hesabetme olanağı var ise de, bu durumun tamamlanması için kanıtlanmış olarak kiriş 1/2°, kiriş 1° kiriş 2° nin elde edilmesi gerekmektedir. Ancak eskiler kiriş 2° nin hesabına ilişkin bir yöntem geliştirememişler, burada söz konusu etmeye değmeyen yaklaşık bir değer bulma yolunu izlemiş-

Bu durumda aralarındaki fark 1^p dir.

Bu kez yay $AB = 1\ 1/2^\circ$

ve yay $AB = 3/4^\circ$ olsun.

kiriş $AB = 2618^p$

kiriş $AC = 1309^p$

Bu durumda kiriş $AC > 1/2$ kiriş AD olması gerekir. Oysa aralarında hiç fark kalmıyor. Demek ki açı bu kadar küçülünce kirişle yayın oranı eşit oluyor.

kiriş $3/4^\circ = 1308^p$ diyebiliriz.

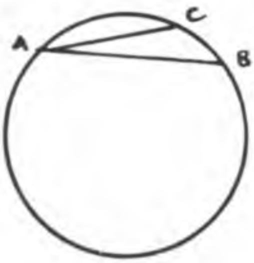
$1/4^\circ + 3/4^\circ = 1^\circ$ olacağına göre

kiriş $1^\circ = 1745^p$

kiriş $1/2^\circ = 872{,}5^p$

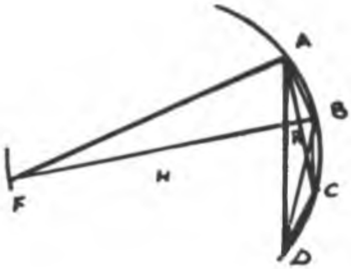
ve kiriş $1/3^\circ = 582^p$

Kuşkusuz bu değerler Batlamyüs'ün belirttiği gibi yaklaşıktır. (537-538) (Şekil 2).



(Şekil 2)

lerdir. Merhum Ulug Bey'e gelince, 'Bize sin 1°nin elde edilmesine ilişkin ilham geldi, demiş ve bu konu üzerine ayrıntılı bir makale kaleme almıştır. Onda matematik kurallara bağlı geometrik kanıtlamalarla, bir derecenin sinüsü ve iki derecenin kirişinin üç yolla çıkarılışını açıklamıştır. Onlardan biri hilesini ortadan kaldırmaksızın tarafımdan yapılmış kısaltmalarla şöyledir". (10b) (Şekil 1).



Şekil 1

$AD =$ kiriş 6°

$AD = 6^p\ 16'49''7'''59''''8'''''56''''''20'''''''$

kiriş $AB =$ kiriş $2^\circ = X$

Batlamyüs teoremi:

$$X^2 + AD.X = AC^2 \quad \boxed{\mathrm{I}}$$

B ile Hyi birleştirip F ye kadar uzatalım. AC yi R de keser. A ile F birleştirilir.

AFB üçgeninde $A = 90^\circ$

AR Hipotenüse indirilmiş dikmedir. Bu durumda AB yani X her ikisinde ortaktır.

$$X^2 = BR.BF$$

$BF = 2^p$ olduğunda

$BR = X^2/2$ $\boxed{II}$

$BF = 120^p$ ise $BR = \dfrac{X^2}{120^p}$ olur.

ARB dik üçgeninde $X^2 = BR^2 + AR^2$

$AR = 1/2\ AC$ olduğundan $AR^2 = 1/4\ AC^2$

ve $X^2 + BR^2 = 1/4\ AC^2$

$\boxed{II}$ nolu formül göz önüne alınırsa

$4X^2 - X^4 = AC^2$ $\boxed{III}$ ye göre

$4X^2 - X^4 = X^2 + X.AD$ $\boxed{I}$ ve $\boxed{III}$ ye göre.

$4X - X^3 = X + AD$

$3\ X = X^3 + AD$

$$X = \frac{X^3 + AD}{3}$$

Bu altı tip denklemden hiç birine indirgenemeyeceği için, şöyle bir yol izler.

Yaklaşık olarak $X = AD/3 = 2^p\ 5'36''22'''39''''42'''''58''''''46'''''''$

Halbuki $X = a + 2^p 5'36''.......$

$$X = \frac{(1 + 2^p 5'36''....)^3 + AD}{3}$$

Bu yol sürdürülerek sonunda

Kiriş$2° = 2^p 5'39''26'''22''''29'''''32''''''28'''''''32''''''''$

elde edilir (10 a–10b).

SİNÜSLER

"Bir açının iki katının kirişinin yarısını vermenin (yani sinüsünü) yeter olduğunu düşünüyoruz. Çünkü genellikle kirişin yarısı daha çok kullanılır. Bu nedenle kirişlerin yarılarının her 1/6° için bir cetvelini hazırladım. Birinci sütunda derecelerin 1/6° bulunur. İkinci sütun bir açının iki katının kirişinin yarısını, üçüncü ise her

Kısım 3 çeşitli yayların sinüsleri üzerinedir.

Sinüs: Bir açının *sinüsü*, yayın bir kenarından, yayın diğer kenarını merkeze birleştiren yarı çap üzerine indirilen dikmedir. Açının iki katının kirişinin yarısı diye de bilinir. (11a).

Kosinüs: Dikme ile merkez arasında kalan doğru ise kosinüstür. (11a) yarım kirişin farkını içerir. Bu farklar yardımı ile istenilen dakikaların kirişlerinin yarıları oranla bulunur. (s. 538)

Sehm (versed sine): Yukarda sözü geçen dikme ile yay arasında kalan doğruya ise *sehm* adı verilir. (1-cosA). (11a)

Nasıl çap kirişten büyük ise ve limitte 180° çapa eşit ise, sinüsler yarı çaptan büyüktür ve 90° nin sinüsü yarı çapa eşittir.

Teorem XIII. 360°nim 1/10'u ve onun yarısının sinüsünün hesabı (yani 36° ve 18°nin hesabı) (11a)

Teorem XV. Sinüs (A–B)'nin formülü:

verilen: yay AB, yayAC ve sin AB = AH, sin AC = AR.
İstenilen: sin BC = RH

AD yi çap yaparak bir daire çizilecek olursa, bu H ve R noktalarından geçer.

Küçük daire içinde oluşan AHRD kirişler dörtgeninde

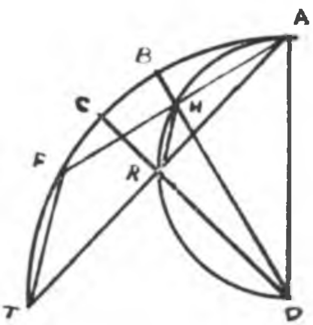
$$AR.DH = AH.RD + RH.DA$$

AH = sinAB	RD = cosAC
AR = sinAC	AD = 60^p (büyük dairenin yarı çapı)
HD = cosAB	HR = sin (AC–AB)

Yerlerine konacak olursa

$$\sin(AC-AB) = \frac{\sin AC.\cos AB - \sin AB.\cos AC}{60^p}$$

(11a–11b)



(şekil 3)

Teorem XVI. Başka bir yöntem:

Verilen: yay AB, yayAC ve sin AB, sin AC.
İstenilen: sinBC.
YC $\perp$ BF
BF = sin CB
HT $\perp$ CY ve BD $\perp$ HT olduğuna göre
$\triangle YCR \sim \triangle HTY$ çünkü R = T = 90° ve Y ortaktır.

Şu halde YH/HT = YC/CR YH biliniyor, YC = yarıçap, YH = cos AB

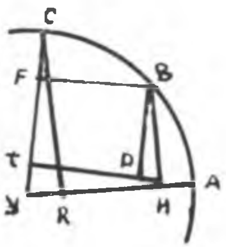
Buradan HT bulunur.

Ayrıca $\triangle BHD \sim \triangle YCR$ çünkü BD // CY ve BH // CR olduğundan
$\angle HBD = \angle YCR$ ve D = Y olur
BH/HD = CY/YR BH, CY, RY biliniyor,

oradan HD bulunur. Oysa HT–HD = DT dir. Ayrıca DT ve BF $\perp$ CY DT = BF olduğundan

$$BF = \sin(AC - AB) = \frac{\cos AB . \sin AC - \sin AB . \cos AC}{60^p}$$

(11b)



(şekil 4)

Teorem XVII. Sin (A + B) nin'formülünün bulunması:

Verilen : yay AB, yay AC ve sin AB = AH, sin AC = AR
İstenilen : sin (AB + AC) = HR

Çap AY olarak çizilen daire H ve R noktalarından geçer.

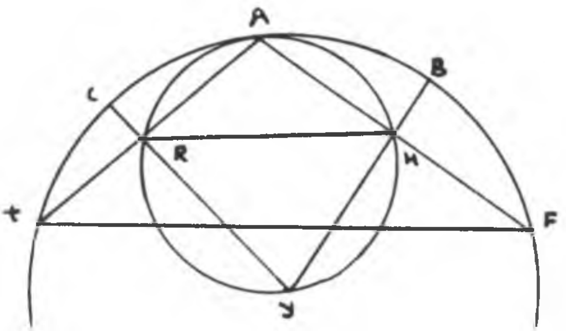
HR = 1/2 FT, HR = sin (AB + AC)
çünkü FT = 2 kiriş (AB + AC)

AHYR dörtgeninde $AR.HY + AH.RY = RH.AY$
Eşitleri konacak olursa

$$\sin AC.\cos AB + \sin AB.\cos AC = \sin (AC + AB).60^p$$

$$\sin (AB + AC) = \frac{\sin AC.\cos AB + \sin AB.\cos AC}{60^p}$$

(12 a)



(Şekil 5).

Teorem XVIII. Bir diğer yöntem:

Verilen : yay AB, yay BC ve sin AB, sin BC
İstenilen : $\sin (AB+AC) = CR$

$\overset{\triangle}{BYH} \sim \overset{\triangle}{FYT}$ çünkü $AY \perp BH$ ve $AY \perp FT$, $CR \perp FD$

Şuhalde : $BH/FT = BY/YF$ ve $FT = DR$
Yerlerine koyacak olursak

$$BH = \sin AB, BY = 60^p, YF = \cos BC \text{ ve } FT = DR = \frac{\sin AB.\cos BC}{60^p}$$

Aynı zamanda $\overset{\triangle}{FCD} \sim \overset{\triangle}{BYH} \sim \overset{\triangle}{FTY}$ olduğundan

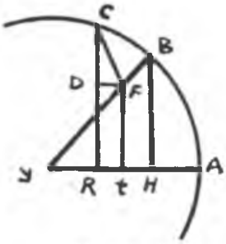
$FC/CD = BY/YH$ $FC = \sin BC$, $BY = 60^p$.
$YH = \cos AB$

$$\sin BC/CD = 60^p/\cos AB$$

$$CD = \frac{\sin BC.\cos AB}{60^p}$$

Yerlerine konursa

$$CD + DR = \sin(AB + BC) = \frac{\sin AB . \cos BC + \sin BC . \cos AB}{60^p}$$



(Şekil 6)

Teorem XIX. Sin A/2 nin elde edilmesi:

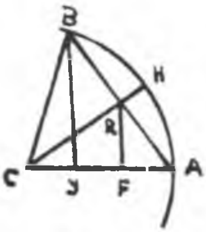
Verilen : sin AB = BY
İstenilen sin 1/2AB = BR = RA

RF ⊥ AC ve RF AY yi ikiye böler

1–YC = AY = 1–cos AB

Diğer taraftan $AR = \sqrt{AF^2 + RF^2}$

$$\sin AB/2 = \sqrt{\frac{\text{versin } AB^2 + \sin AB^2}{4}} \quad (12b)$$



(Şekil 7)

Teorem XX. Sin 1°nin bulunması:

$X = \sin 1° = AB$ $BF = 1$ veya $BF = 60^p$

ABF dik üçgeninde AR hipotenüse indirilmiş bir dikmedir.

$AB^2 = BR.BF$
$BR = X^2$
$BR^2 = X^4$ $\boxed{\text{I}}$

ABR dik üçgeninde $X^2 = BR^2 + AR^2$
$BR^2 = X^2 - AR^2$ $\boxed{\text{II}}$
$X^4 = X^2 - AR^2$ $\boxed{\text{I}}$ ve $\boxed{\text{II}}$ göre

ABCD kirişler dörtgeninde $X.AD + X^2 = AC^2$ $\boxed{\text{III}}$
$AC = 2AR$
$AR^2 = 1/4\ AC^2$

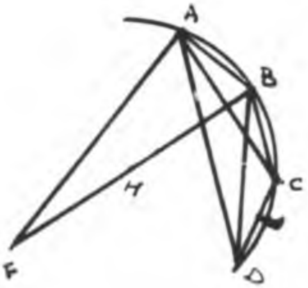
$4X^4 - 4X^2 = X.AD - X^2$ $\boxed{\text{II}}$ ve $\boxed{\text{III}}$
$X = 4/3\ X^3 + 1/3\ AD$

X^3 ü atmak yoluyla yaklaşık olarak
$X = 1/3AD = 1/3\ 3^p 8' 24'' 36''' 59'''' 35''''' 28'''''' 15'''''''$

Daha yaklaşık bir değer elde etmek için
$X = 4/3\ (a + 1^p 2' \ldots .)^3 + 1/3\ AD$

Sonuçta $\sin 1° = 1^p\ 2'\ 48''\ 11'''\ 19''''\ 51'''''\ 29''''''\ 25'''''''$

(12b–13a)

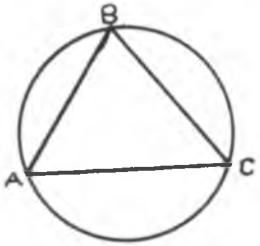


(Şekil 8)

DÜZLEM ÜÇGENLERİ ÜZERİNE

I

Bir üçgenin kenarları verilmiş ise üçgen biliniyor demektir.
Bir üçgenin çevresine bir daire çizilirse yay AB, yay BC, ve yay CA bilinir ve bu yayların kirişleri cetvellerden bulunur (s. 543)



(Şekil 9).

II

Bir üçgenin iki kenarı ve açılarından biri verilirse, diğer kenar ve açıları bulunur. (543).

III

Kenarların kuşattığı açı 90° ise kenar ve diğer iki açısı da bilinir. (S. 543).

IV

Kenarların kuşattığı açı dar açı ise, üçgenin geri kalan ögeleri de bilinir. (s. 543-544).

V

Kenarların kuşattığı açı geniş açı ise, geri kalan ögeleri de bilinir. (s. 544).

VII

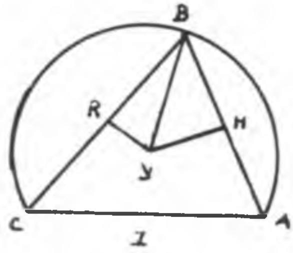
Bir üçgenin bütün kenarları verilmiş ise açıları da verilmiştir. (s. 544).

Kitap 1, Bölüm 4:

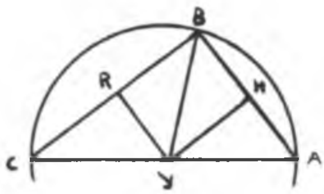
Teorem XXX: Bir üçgenin çevresine bir daire çizilecek olursa, bu üçgenin kenarları açılarının sinüsleriyle orantılıdır. (Dar, dik, geniş açılı olabilir)

AB/BC = sin C/sinA
sinüs teoremi

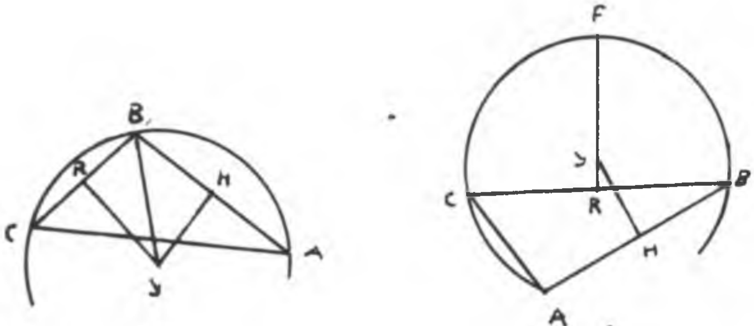
Kanıtlanması: Bu üçgenlerin çevresine birer daire çizilsin. Y ile B birleştirilsin. AB ve BC üzerine YH ve YR dikmeleri çıkarılsın. Ancak dördüncü şekilde dikme çevreye kadar uzatılır. Bu nokta F olsun. (Şekil 10 d).



a



b



c d

şekil 10

Bir çevre açısı merkez açısının yarısına eşit olduğundan,

BYH = C
BYR = A
BYF = A şekil d de
BH = sin 1/2 yay AB = sin C
BR = sin 1/2 yay BC = sin A

AB/BC = BH (= sin BYH = sin C)/BR (= sin BYR = sin A)

Böylece AB/BC = sin C/sin A olur. (16a)

KÜRESEL ÜÇGENLER

14. Küresel üçgenler üzerine.

Bir küre yüzeyi üzerinde, büyük daire yaylarından oluşan üçgene küresel üçgen adı verilir.

I

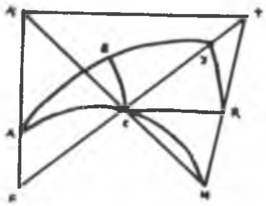
Bir küre yüzeyinde kesişen yaylardan ikisinin toplamı, üçüncüsünden daha uzun ise, bu üç yay bir küresel üçgen oluşturabilirler. (s. 545)

II

Bir küresel üçgenin kenarları yarım daireden küçük olmalıdır. Çünkü: Yarım daire merkezde bir

Bölüm 5. Ebû Nasr Ibn Irak'a atfedilen Mugnî ve onun dalları üzerinedir ve dört kısımdan oluşur.

Teorem XLI Büyük daire yaylarından oluşan ABC üçgeni olsun. Kenarlardan hiç biri yarım daire veya yarım daireden büyük olmasın. Eğer B = 90°



(Şekil 11)

açı meydana getiremez, bir doğru oluşturur. (s. 546).

III

Dik açılı küresel üçgenlerde, dik açıyı gören kenarın iki katının kirişinin, kenarlardan birinin iki katının kirişine oranı, kürenin çapının, iki kenarın oluşturduğu açının iki katının kirişine oranına eşittir.

Verilen: ABC küresel üçgeni,

$C = 90°$

kiriş 2AB/kiriş 2BC = çap/kiriş 2BAC

(Buradaki kanıtlamada şekil çizilmemiştir. Ancak anlam çok açıktır.).

Verilen: ABC küresel üçgeni ve

$C = 90°$

ABC ve ACE kadranları tamamlanır.

Kürenin merkezi F dir.

FA, FE, FD, FC ortak kesenleri çizilsin . $BG \perp FA$, $BI \perp FC$,

$DK \perp FE$ $AED = 90° = ACB$

$EDF \perp AEF$, $BCF \perp AEF$

Ayrıca $DK \parallel BI$ ve $FD \parallel GB$

$FCB = GFD = 90°$

$FDK = GBI$, $FKD = 90°$

Benzer üçgenlerin kenarları birbiriyle orantılıdır.

$DF/BG = DK/BI$

Oysa $BI = 1/2$ kiriş 2CB,

$BG = 1/2$ kiriş 2BA

$DK = 1/2$ kiriş 2 $DE = 1/2$ kiriş 2 DAE

$DF = 1/2$ çap

sin A/sin BC = sin B/sin AC dir.

Kanıtlanması: AB ve AC kenarları çeyrek daireye ulaşıncaya kadar uzatılsın. A kutup yapılarak YH yayı çizilsin. A = YH dir.

CB = YR olacak biçimde bölünsün. CR yayının daire düzlemi AY yayının daire düzlemine paraleldir.

Kürenin merkezi F dir. HR kirişinin uzantısı ile F ve Y yi birleştiren doğrular T de kesişirler. KT doğrusu AY dairesi düzlemiyle HRC üçgeninin düzleminde bulunur, ve RC ye paraleldir. KHT üçgeninde

HT/TR = HK/ KC dir.

HT/TR = sin HY/sin YR = sin A/sin BC

HK/KC = sin HA (90°)/sin CA = sin 90°/sin CA

Şu halde sin A/sin BC = sin 90°/sin CA (18b-19a).

Teorem XLIII. Mugnînin birinci sonucu :

$AC = CY = BH = BA = 90°$

CA ve CY C de, BH ve BA B de kesişirler. Her ikisi de R ve A da kesişirler. B, AC nin kutbu C de AB nin kutbudur.

cos RY/cos BR = sin 90°/cos BY

Mugnî'nin birinci sonucu.

Öyleyse kiriş 2 AB/ kiriş 2 BC = çap/kiriş 2 DAE

IV, V dik üçgenlerde bilinmeyen ögelerin hesabı üzerinedir.
VI, VII, VIII, IX, X iki küresel üçgenin eşitliği üzerinedir (s. 546).

XI, XII

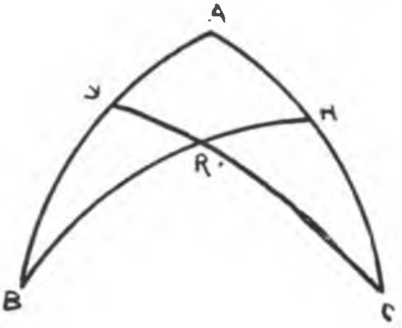
Bir üçgende iki kenar ve bir açı verilmiş ise diğer ögeler de verilmiştir.

XIII

Bir üçgenin bütün kenarları verilmiş ise açıları da verilmiştir.
Verilen: ABC üçgeninin kenarları.

1. İkiz kenar üçgen ise, bu kenarların iki katlarının yarılarının kirişleri eşit olacaktır. ABC üçgeninde AB = AC olduğundan BE = 1/2 kiriş 2 AB, CE = 1/2 kiriş 2 AC ve BE ve EC kirişleri A ile D yi birleştiren E noktasında kesişirler. Öklid III, 3 e göre ABD düzlem üçgeninde DEB = 90°, gine ACD düzlem üçgeninde DEC = 90°. Öklid XI, 3 göre BEC açısı eğim açısıdır, ve şöyle bulunabilir. BEC düzlem üçgeninde kenarlar verilmiştir buradan açılar da bulunabilir. BEC açısı BC kenarını gören açı olduğundan kiriş BC oradan da kenar BC bulunur (s. 554).

2. Eger üçgenin kenarları eşit değil ise, kenarların iki katlarının kirişlerinin yarıları aynı noktada



(Şekil 12)

Kanıtlanması: B açısı yerine C açısı konacak olursa

sin CR/sin RH = sin 90°/sinC

Ancak sin CR = cos B

sin HR = cos BR

sin C = sin AY = cos BY

Yerlerine konulacak olursa, yukardaki sonuç elde edilir (19a).

Teorem XLIV. Mugnînin ikinci sonucu :

YRB küresel üçgeninde (Şekil 12)

cos B/cos YR = sin R/sin 90°

Kanıtlanması: B açısı yerine C açısı konulacak olursa

sin CH/sin CR = sin R/sin90°

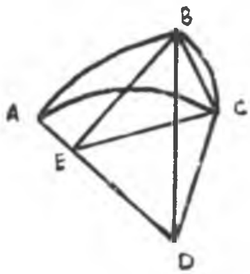
sin HC = cos AH (B açısının karşısındaki yay)

sin CR = cos YR

Eşitlerini yerine koyacak olursak, yukardaki denklem elde edilir (19b).

Teorem XLV. Mugnînin üçüncü sonucu :

Kesenlerdeki BYR ve CHR üçgenlerinde H = Y = 90° ve R açıları eşittir.



(Şekil 14).

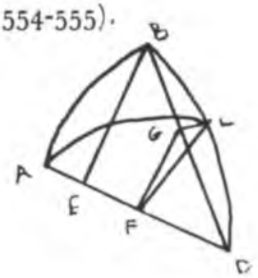
birleşmeyecektir. ABC üçgeninde AC > AB ise CF = 1/2 kiriş 2 AC daha aşağıya düşecektir. Eğer AC < AB ise CF daha üste düşecektir.

GF // BE çizilsin. Bu BD yi G noktasında kesecektir.

EFG = AEB = EFC = 90°

Ayrıca CF = 1/2 kiriş 2 AC Böylece CFG açısı AB ve AC kenarlarının kesişme açısıdır.

$\triangle DFG \sim \triangle DEB$ olduğundan
DF/FG = DE/EB dir.
Buradan FG ve FC bulunur (s. 554-555).



(Şekil 15)

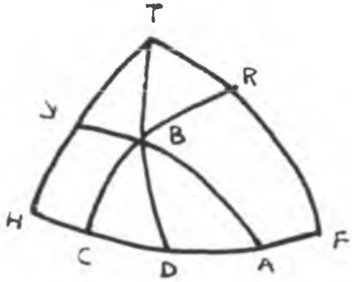
XV

Eğer bir üçgenin bütün açıları verilmiş ise (ve hiç biri doksan de-

sin RY/sin BY = sin HR/sin CH
Mugnî'nin üçüncü sonucu (Şekil 12) (19b).

Bölüm 6 Üçgenlerin kenarlarının oranı üzerine:

Teorem LII. Verilen ABC küresel üçgeninde (dar, dik, geniş açılı olabilir) şu bağıntı söz konusudur.



(Şekil 13)

sin AB/sin BC = sin C/sin A
Kanıtlanması: AB ve AC kenarları çeyrek yaya ulaşıncaya kadar uzatılacak olursa T noktası CA nın kutbu olur.

TBD büyük dairesi AC kenarını D noktasında keser. TFCB keseninde

sin TD/sin DB = sin TF/sin FR. sin RC/sin CB
ve sin TD = sin TF oldugundan
sin RF.sin CB = sin RC.sin BD
Gine THAB keseninde
sin TD/sin DB = sin TH/sin HY. sin YA/sin AB
sinTD = sin TH olduğundan
sinTY.sinAB = sinDB.sin AY

rece değil ise) bütün kenarları da verilmiştir.

ABC üçgeninin bütün açıları verilmiştir. A açısından CB kenarına AD dikmesi çizilsin. BAF, CAG ve DAE çeyrek yayları tamamlansın. B ve C kutup yapılarak EF ve EG yayları çizilsin.

F = G = 90°

EAF dik üçgeninde

1/2 kiriş 2 AE/1/2 kiriş 2 EF =

1/2 çap/1/2 kiriş 2 EAF

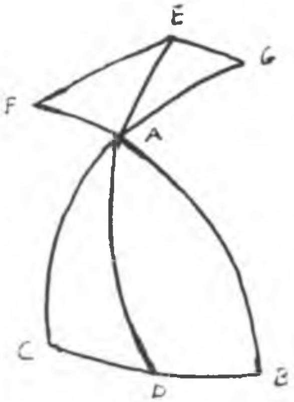
ve gine AEG dik üçgeninde

1/2 kiriş 2 AE/1/2 kiriş 2 EG=1/2 çap/1/2 kiriş 2 EAG

Bu iki orandan

1/2 kiriş 2 EF/1/2 kiriş 2EG=1/2 kiriş 2 EAF/1/2 kiriş 2 EAG elde edilir. FE ve EG verilmiştir, çünkü EF = 90° — B ve EG = 90° — C

EAF ve EAG açıları verilmiştir.



(Şekil 18).

sinRC = sinAY olduğundan

sinRF.sinBC = sin TH.sinBA

Mugnîden elde edilen bilgilerden

sin RF/sinBD=sin RC/sin BC

ve sinBD/sinHY = sinAB/sinAY

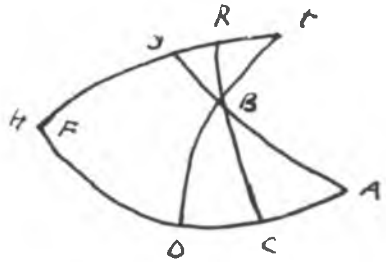
Mademki AY = RC

Şuhalde sinAB.sinYH=sinBC.
sinRF (sinC)

Yani sin AB/sin BC = sin C/sinA

Teorem LIII.

Eger TBD büyük dairesi AC kenarını C açısının geniş açı olması nedeniyle C nin uzantısında keserse: Kenarlar B ve C yönüne doğru çeyrek yaya ulaşıncaya kadar uzatılır. Bu durumda F ve H noktaları üst üste gelir. İşlem öncekinin tekrarıdır.



(Şekil 15).

Teorem LIV. ABC üçgenin kenarları verilmiş olsun.

Kenarları çeyrek yaydan küçük olsun ve açılar dik olmasın.

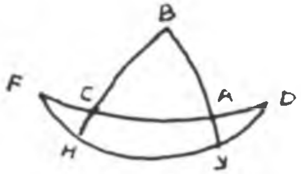
İstenilen: Üçgenin diğer öğeleri. B kutup olmak üzere, AC yayı yönünde büyük daire yayı çizilsin AB nin uzantısı bu yayı Y de BC nin uzantısı ise H de keser. AC yayınının uzantısı da bu büyük

BAD ve CAD açıları baştan karşı açılardır. Buradan BAC açısının bütünü verilmiş olur. Teorem V yoluyla da AB, BD, AC, CD kenarları ve BC nin bütünü elde edilir (s. 556)

daire yayını D ve F noktalarında keser. AY ve CH kenarları 90° ye tamamlayan yaylar olduklarından bilinir.

DA + CF aynı nedenlerden dolayı,

sinDA/sinAY = sinFC/sinHC
Ancak sinRC + sinCF bilindiğinden ve
sinDA/sinAY = sinCF/sinCH de yerler değiştirilerek



(Şekil 16)

$$\mathrm{sinDA/sinCF = sinAY/sinCH}$$

$$\frac{\mathrm{sinDA + sinCF}}{\mathrm{sinCF}} \text{ de}$$

bilindiğinden AD ve CF de bilinir.

Mugnî teoremi uygulanarak açılar bulunur.

Teorem LV. Önceki özelliklere sahip yalnız açıları bilinen ABC üçgeni verilmiş olsun.

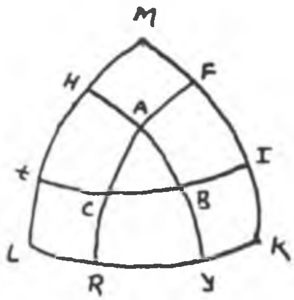
İstenilen: üçgenin kenarları.

Üçgenin kenarları iki yöne doğru çevreye ulaşıncaya kadar uzatılır. A, B, C nin her biri kutup yapılarak K, L, M noktalarında kesişen daireler çizilir.

RY = A, TH = B, FI = C
KI + IF = 90°
FM + FI = 90° olduğundan

KM yayının bütünü bilinir.

Aynı işlem KL ve LM yayları için de söz konusudur.



(Şekil 17)

GÖLGE (TANJANT) TEOREMİ

Copernicus'da bununla ilgili bir çalışma yok.

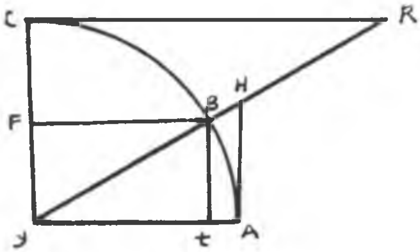
Bölüm VI. Gölge teoremi ve ondan çıkarılan sonuçlar üzerinedir.

I. Menkûs, birinci gölge, tanjant: Geometrik tanımı: Çapın daireyi kestiği yerde, çapa indirilen dikmenin, açının ikinci kenarının uzantısının kestiği kısım arasında kalan doğru parçasıdır. Açının sinüsüne paraleldir.

II. Mebsût, ikinci gölge, kotanjant:

Geometrik tanımı: Açının kosinüsüne paralel olup dairenin dışında oluşur, ve açının kenarının daireye değdiği noktada çapa diktir.

Teorem XLVII. Gölgenin özelliklerini anlatabilmek için Y merkezi üzerinde ABC çeyrek dairesi olsun. A ile Y, C ile Y, B ile Y birleştirilsin. YB,R noktasına kadar uzatılsın. A dan AY üzerine YB nin uzantısını H de kesen ve C den YC ye YB nin uzantısını R de kesen birer dikme çizilsin.



(Şekil 20)

CR = birinci gölge (tg BC)

BF (sinBC) // CR (tg BC)

AH = tg AB

BT (sin AB) // AH (tg AB)

Her yay diğerini 90° ye tamamlar.

$\triangle AHY \sim \triangle TBY \sim \triangle CRY \sim \triangle FYB$

tg A/sinA = yarı çap/sin (90°–A)

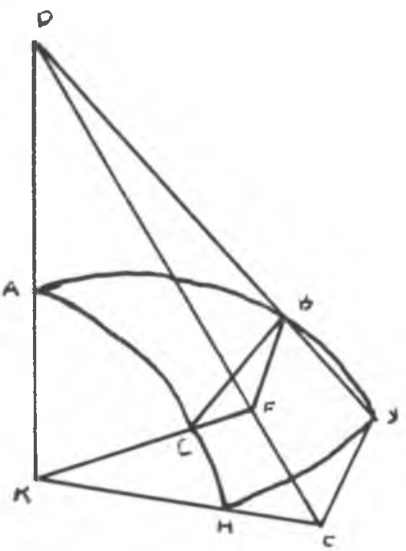
Çünkü $HA/AY(CY) = YC/CR$

$HA = tg\,A$, $AY = CY =$ yarıçap, $CR = tg\,(90°-A) = ctg\,A$

Ohalde $tgA/ctg\,A =$ yarı çap^2 yarıçap $= 1$ ise

$tgA.ctg\,A = 1$

Teorem XLVIII. Tanjant teoremi: Ebû'l-Vefâ el-Buzcânî'ye atfedilir: Bir küre yüzeyinde büyük daire yaylarından oluşan ABC küresel üçgeni olsun. kenarlar çeyrek daireden küçük ve $B = 90°$ olsun



(şekil 21)

$tgA/tgBC = \sin B/\sin AB$ dir.

Kanıtlanması: AB ve AC kenarları çeyrek daireye ulaşıncaya kadar, yani Y ve H noktalarına kadar uzatılsın. Y ile H birleştirilsin. Kürenin merkezi R ile A,C,H noktaları birer doğru ile birleştirilsin. ABY dairesi düzlemine BF, YC dikmeleri çizilsin ve bunlar RC ve RH doğrularıyla F ve c noktalarında kesişinceye kadar uzatılsın.

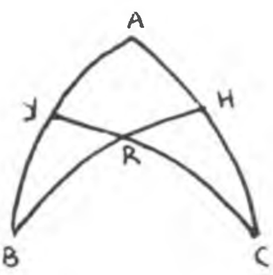
$BF = tgBC$, $Yc = tgYH$

Y ile B birleştirilsin ve AR nin uzantısını D noktasında kesinciye kadar uzatılsın. c,F,D noktaları bir doğru üzerinde bulunur.

$\overset{\triangle}{\text{YcD}} \sim \overset{\triangle}{\text{BFD}}$

tgA (Yc)/tgBC (BF) = YD/DB /= sin AY (sin 90°)/sinAB
1, in 32' göre buradan tgA/tgBC = sin 90°/sinAB)

Teorem XLIX Tanjant teoreminin birinci sonucu: BACR kesenleri çizilsin. B, AC nin kutbu ve C, AB nin kutbu olsun. (şekil 22)



(şekil 22).

cos B/sin 90° = ctg BR/ctg BY (RBY üçgeninde)

Kanıtlanması: HCR üçgeninde sin CH (cos B)/sin AC (sin 90°) =
tgRH (ctgBR)/tgC (ctg BY)

Teorem L. Tanjant teoreminin ikinci sonucu: Yine aynı üçgende (şekil 22)

cosBR/sin90° = ctg B/tgR

Kanıtlanması: aynı kesende

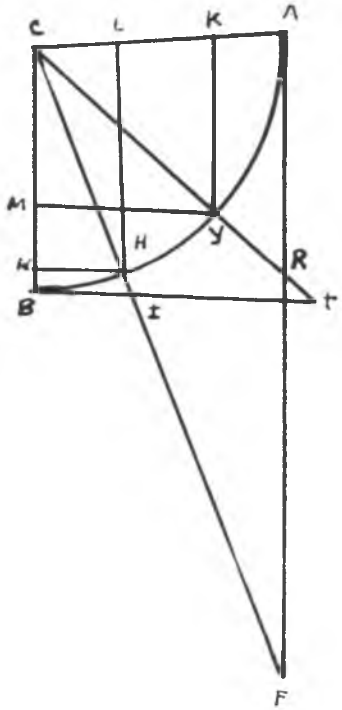
cos BR/sin 90° = tg CH (ctg B) /tgR

Yani cos BR/sin 90° = ctg B/tg R (RBY üçgeninde)

Teorem LI. Tanjant teoreminin üçüncü sonucu: Kesenlerin uçlarındaki iki üçgen benzer üçgenlerdir, çünkü Y = H ve R açıları baştan karşı açılardır. Şu halde sin RY/tgYB = sin RH/tg HC (şekil 22)

Teorem. Tanjantın özelliklerinden: Bir yayın tanjantının ondan daha büyük bir yayın tanjantına oranı, büyüğün kotanjantının küçüğünün kotanjantına oranına eşit olması gölgenin özelliklerindendir.

Örneğin C merkezi üzerindeki AB çeyrek dairesi olsun. AY<AH



(şekil 23)

tgAY (AR)/tgAH (AF) = ctgAH (BI)/ctgAY (BT)